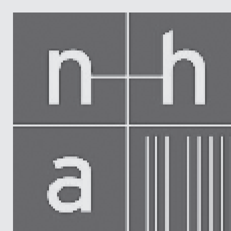
EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

nr 7

juni 2013





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

nr 7

juni

2013

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Veranderingen

Omdat ik een snelle leerling was maar niet zo veel zin had in lang doorstuderen, ben ik op jonge leeftijd het bedrijfsleven ingerold. Vanaf dat moment ben ik geconfronteerd met veranderingsprocessen binnen organisaties, want zoals het cliché luidt: 'Stilstand is achteruitgang'. Het maakte me altijd wel wat achterdochtig. Ooit las ik de volgende dichtregels: 'We moeten ons vernieuwen', zo riep de vrouw heel luid; ze had net een andere man ontmoet, dus kwam het haar goed uit'. Als een of andere manager dan riep: 'We gaan het heel anders doen', voelde ik hetzelfde cynisme als de dichteres: voor wie komt dat goed uit? Nu veel studies en jaren verder weet ik dat de tijd in het bedrijfsleven me totaal niet heeft voorbereid op de hectiek van het onderwijs – met wijziging na verandering na herziening na …

Toch gaat uw vertrouwde *Euclides* ook veranderen. En nee, niet omdat ik een andere man ontmoet heb. Zoals u weet hebben we twee jaar geleden een uitgebreide lezersenquête uitgevoerd. Over de resultaten hebt u dit jaar kunnen lezen in *Euclides* nummer 5. Samen met het NVvW-bestuur heeft de redactie onder andere naar aanleiding daarvan een restyling opgestart. Het resultaat gaat u zien met ingang van komende jaargang – deze aankondiging moet u dan ook vooral zien als cliffhanger. Geniet vooral nog even van de bekende uitstraling en laat u verrassen na de vakantie. We zijn zelf erg tevreden over het resultaat.

Inhoud

De laatste van dit jaar is een gevarieerd nummer. Uiteraard zoals u van ons gewend bent met veel rubrieken en verder voor elk wat wils. Zonder de andere bijdragen tekort te doen wil ik er graag twee onderwerpen uitlichten.

Op zaterdag 27 april was de schenking van het archief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren aan het Noord-Hollands Archief. Mocht het u ontgaan zijn, dan is er niets aan de hand. Danny Beckers praat u namelijk bij over de officiële overdracht en Harm Jan Smid informeert u volledig over de totstandkoming van het archief. Hulde voor Harm Jan die hier zoveel tijd en energie aan heeft besteed.

En graag uw aandacht voor het artikel van Ton Konings: hiermee sluit hij de serie *Klein vakdidactisch onderzoek algebra* af. In deze bijdrage kijkt hij terug op het proces met zijn studenten en biedt hij wiskundedocenten een handvat tot het doen van vakdidactisch onderzoek en het voeren van vakdidactische gesprekken binnen hun eigen onderwijsomgeving. Mocht het bij u in sectie nog niet op de agenda staan, dan is dit misschien een goede aanleiding.

Afscheid

Afgelopen jaar hebben we tijdens een redactievergadering afscheid genomen van Wim Laaper, een gewaardeerd lid van de redactie sinds 1995(!). De laatste jaren was hij secretaris naast zijn gewone redactiewerk en we zijn erg blij met al het werk dat hij voor ons heeft verzet.

En dan nog een verandering met ingang van komende jaargang: dit is het laatste nummer onder eindredactie van Dick Klingens. Vanaf 2000 is hij onvermoeid onze eindredacteur geweest. Hij heeft in die periode vier hoofdredacteurs ondersteund en is medeverantwoordelijk voor vele mooie specials die de afgelopen jaren naast de reguliere *Euclides* zijn uitgebracht. Met als kroon op het werk de laatste special samen met Klaske Blom over *Getallen*, in 2012. Ook al had ik een andere man ontmoet, dan nog zou deze verandering me niet uitkomen. Gelukkig blijft hij onze redactie nog wel versterken en kunnen we gebruik blijven maken van al zijn ervaring en expertise.

Laatste loodjes

Met dit laatste nummer in de bus bent u waarschijnlijk op school bezig met de laatste loodjes. Opruimen, rapportvergaderingen, diploma-uitreikingen en wat dies meer zij. Als die afsluitende activiteiten allemaal achter de rug zijn, dan gaat u hopelijk van de welverdiende rust genieten. Ik wil u namens de redactie dan ook een heel prettige vakantie toewensen.

Inhoud

Klein vakdidactisch onderzoek Algebra

DEEL 6

[Ton Konings]

Dit is het zesde en laatste artikel in een serie over 'Klein vakdidactisch onderzoek algebra'. De eerste vijf artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. Vier artikelen werden geschreven in de cursus van 2011-2012 door deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, naar aanleiding van ervaringen in de klas. Aan de hand van de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, ze maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. De artikelen werden voor plaatsing in 'Euclides' in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig bewerkt. Ook ontwikkelde hij daarbij een beoordelingsinstrument voor vergelijkbare artikelen bij volgende cursussen. Het vijfde artikel is door een derdejaars voltijdstudent geschreven, na de volgende cursus Vakdidactiek Algebra in 2012-2013 en met de instructie van het genoemde beoordelingsinstrument. De ontwikkeling en het effect van dat instrument wordt besproken in onderstaand artikel, dat een verkorte versie is van een uitvoeriger notitie [1].
Deze artikelenserie beoogt wiskundedocenten en secties een handvat te geven tot het doen van vakdidactisch onderzoek en het voeren van vakdidactische gesprekken.

Van analyse van een vakdidactisch probleem tot vakdidactisch gesprek

Enige context van wiskundedidactiek op de tweedegraads lerarenopleiding

Voor de tweedegraads lerarenopleiding zijn vanuit de Samenwerkingsgroep Lerarenopleidingen Wiskunde twee series van vakdidactiekboeken geschreven.[2]
Twee boeken hebben daarin een centrale plaats: 'Het leren van wiskunde' (zie [3] en ***figuur 1***) en 'Algebra voor leerlingen van 12-16' (zie [4] en ***figuur2***). Het eerste boek bespreekt het leren van wiskunde door leerlingen en het wiskundedidactisch handelen van de docent; het tweede boek behandelt de vakdidactiek van het grootste leerstofdomein van de schoolwiskunde.



figuur 1

De vijf eerste artikelen in deze reeks gaven in de paragrafen 'analyse vanuit de literatuur' een aantal voorbeelden van de inhoud van deze boeken.
Bij wiskundedidactiek gaat het, gekoppeld aan wiskundeleerstof, over hoe leerlingen leren en over manieren waarop je met leerlingen aan doelen van wiskundeonderwijs kunt werken.

Doelen wiskundeonderwijs in het VO

Van Streun (zie noot [3] en noot [5]) onderscheidt vijf, met elkaar verweven, categorieën van doelen van wiskunde-onderwijs:

1. *Weten dat:* kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken.
2. *Weten waarom:* principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht.



figuur 2

3. *Weten hoe:* probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden.
4. *Weten over weten:* reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak
5. *Houding:* wiskunde leren is leuk, interessant, het geeft voldoening en ik kan het.

Leerlingen en ook lesgevende studenten zijn in eerste instantie gericht op punt 1. Vakdidactiek gaat ook en juist over de andere aspecten.

Bijbehorende docentvaardigheden

Per categorie van doelen kunnen passende docentactiviteiten worden onderscheiden:

1. Bij 'weten dat' heeft de docent vooral een controlerende en norm bewakende rol: precies nagaan wat leerlingen moeten kunnen en kennen. Wat is de kern van de zaak?
2. Bij 'weten waarom' is de docent actief in het leiden van het gesprek en de interactie met de groep: oriënteren op leerstof, probleem stellen, denkvragen, wat is het globale idee, wat betekent..., geef eens een voorbeeld van..., op welke manieren, maak eens een schets, weet je het zeker?...
3. Bij 'weten hoe' is de docent vooral procesbegeleider, zowel klassikaal als individueel: denkvragen, hoe, waarom, wat zou jij, welke manieren, open vragen, 'dikke' vragen (verderop uit de leerstof), waar gaat het over, wat kun je doen, wat is er moeilijk aan,...
4. Bij 'weten over weten' bewaakt de docent wat er gebeurt, en bespreekt ook individueel na: hoe kun je jezelf controleren, waarom is het gelukt, ben je goed bezig,...
5. Ten aanzien van 'houding' inspireert de docent, selecteert geschikte taken, werkt samen met collega's, gaat buurten bij andere vakken voor integratietaken, ...; aandachttrekker, instapverhaal, instapprobleem, puzzel, plaatje, cartoon, video, praktische opdracht, wedstrijd,...

Vakdidactiekcursussen

In de genoemde vakdidactiekboeken worden bovenstaande punten gekoppeld aan wiskundeleerstof. In vakdidactieklessen op de opleiding wordt de student in interactie met medestudenten en docent gestimuleerd deze vakdidactiekleerstof te koppelen aan eigen praktijkervaringen.

Verwerkingsopdracht 'Klein vakdidactisch onderzoek algebra'

De cursus Vakdidactiek Algebra van 2011-2012 voor deeltijdstudenten werd afgesloten met een verwerkingsopdracht – zie ***figuur 3*** (op pag. 328)– waarbij de studenten, meestal beginnende docenten, naar aanleiding van ervaringen in de klas een artikel schreven. Daarbij was het de bedoeling dat ze, met behulp van bovengenoemde boeken en eventuele aanvullende literatuur, die ervaringen analyseerden, voornemens maakten en waar mogelijk nog uitvoerden. In viertallen wisselden ze de artikelen uit en becommentarieerden ze elkaars werk. Daarna gaf de docent een beoordeling.

Ervaringen met artikelen van studenten

Bij die artikelen rees, uitzonderingen daargelaten, het volgende beeld.

- Het was voor de deeltijdstudenten niet moeilijk om zinvolle probleemsituaties met leerlingen te vinden.
- Fouten van leerlingen werden heel precies beschreven.
- Leerstof werd helder beschreven, maar vaak alleen met betrekking tot gemaakte fouten van leerlingen en niet in de lijn van een heel hoofdstuk of in relatie met voorkennis of vervolgstof. Analyse van de opbouw van concepten gebeurde niet veel.
- Bij analyse van fouten werd nauwelijks vakdidactische literatuur gebruikt.
- Conclusies lagen veel in de sfeer van: 'leerlingen moeten meer oefenen'.
- Alternatieven lagen in de 'weten dat'-sfeer, bijvoorbeeld met een andere oplossingsmanier, en in de 'houding'-sfeer, bijvoorbeeld door het gebruik van een leuke applet.
- Te weinig werd gekozen voor alternatieven, die gericht waren op ontwikkeling van begrip en inzicht. Soms waren plannen in strijd met besproken vakdidactische theorie.
- Studenten zijn niet gewend artikelen te schrijven. Wat schrijfstijl en helderheid betreft valt er veel aan te merken.
- Niettemin waren ze goed genoeg om interessant te zijn voor elkaar. Bij het becommentariëren van elkaars artikelen uitten ze herkenning van de problemen van de auteurs en waardeerden ze suggesties voor uitbreiding van hun eigen vakdidactische repertoire.
- Bij het becommentariëren gaven ze weinig inhoudelijke suggesties aan de auteurs. Dit houdt vermoedelijk enerzijds verband met de schriftelijke vorm van communicatie over de artikelen, anderzijds met hun beperkte tijd.

Kortom, de verwerkingsopdracht leverde interessante artikelen op, met herkenbare problemen van leerlingen en zinvolle, maar soms ook minder zinvolle suggesties voor handelen van de docent. Daarbij schoten studenten enerzijds tekort in een onderzoeksmatige analyse van problemen van de leerlingen en anderzijds in het gebruik van vakdidactische literatuur daarbij.
Het fenomeen dat oplossingen gezocht worden zonder gedegen analyse van een probleem, is in het algemeen en ook specifiek in de praktijk van het wiskundeonderwijs herkenbaar. Voor de auteur was het een vraag of en hoe hierin een verbetering mogelijk was.

Een oefening in vakdidactisch praktijkonderzoek

Het aanleren van een meer 'onderzoekende houding' wordt op dit moment in het hbo gestimuleerd via het laten doen van 'praktijk-onderzoek'. Ook in scholen wordt steeds meer geprobeerd om, naast de hectiek van alledag, ruimte te scheppen voor analyse en verbetering van de onderwijspraktijk door vakdocenten. Ter onderscheid van *wetenschappelijk onderwijsonderzoek* wordt praktijkonderzoek als volgt omschreven: '*Praktijkonderzoek* in de school is onderzoek dat wordt uitgevoerd door leraren en leraren-in-opleiding, waarbij op een systematische wijze in interactie met de omgeving antwoorden verkregen worden op vragen die ontstaan in de eigen onderwijs-praktijk en gericht zijn op verbetering van deze praktijk.' (Van der Donk en Van Lanen; zie [6]). Vaak gaat het dan om ontwerp-onderzoek (of interventieonderzoek).
We spreken in dit artikel over 'klein vakdidactisch onderzoek'. Met de term 'onderzoek' – waarvoor we ook wel 'reflectie' hadden kunnen gebruiken – plaatsen we deze activiteit in het kader van bovengenoemde praktijkonderzoek. Het schrijven van het artikel als verwerking van een cursus, in relatie tot praktijkervaringen, kan beschouwd worden als een oefening ten behoeve van een vakdidactisch praktijkonderzoek, bijvoorbeeld in voorbereiding op een afstudeeronderzoek.
Van de onderzoekscyclus worden de stappen tot en met de ontwerpfase doorlopen. Verondersteld werd dat voorbeeldartikelen en een verbeterde instructie tot een kwaliteitsverbetering van de artikelen zou leiden.

Voorbeeldartikelen

Vijf artikelen werden geselecteerd en in samenwerking met de docent bewerkt tot 'voorbeeldige' artikelen. Enige ervaringen daarbij zijn:

- De verwachting van plaatsing in *Euclides*, evenals intensieve samenwerking met de docent, werkte voor de studenten stimulerend.
- Enkele studenten gingen nu pas hun schoolboek goed bestuderen of doken nu pas goed de literatuur in.
- Ook voor de docent was het een flinke klus. Het is noodzakelijk mee te duiken in het schoolboek en de literatuur. Elk artikel was een nieuwe 'case-study'.
- Soms kwam de docent tot tegen-overgestelde conclusies en voornemens als die van de student in de oorspronkelijke versie van het artikel.
- Suggesties vanuit de docent naar welke aanwijzingen uit het cursusboek relevant zijn, werden dankbaar aanvaard.
- Creativiteit in ontwerpactiviteit van de student viel niet altijd mee. De docent droeg daarbij soms essentiële suggesties aan.
- Het ordenen van informatie vroeg nogal wat van de student, maar al vrij snel ontstond een goed gemeenschappelijk onderzoeksstramien.
- De oorspronkelijke, maar ook de herschreven artikelen waren meestal te lang voor *Euclides*. Met snoeien werd hier en daar wat afbreuk gedaan aan de onderzoeksmatige lijn van het artikel. Een lezerspubliek moet naast bondigheid heldere oplossingen en aanvullend didactisch repertoire geboden worden. In alle gevallen leidden deze wensen tot krachtiger artikelen.

Beoordelingsschema

Uit het herschrijven van de eerste drie artikelen ontstond het beoordelingsschema waarvan een deel in ***figuur 4*** (op pag. 329) is opgenomen. Het schema beoogt in de stappen 1 tot en met 5 instructief te zijn en beoordelings-criteria te geven met betrekking tot de onderzoeksaanpak. Daarnaast zijn er nog criteria met betrekking tot Bronvermelding, Vormgeving, Taal, Organisatie van samen-werking en Kwaliteit van elkaar gegeven feedback.

Gebruik van voorbeeldartikelen en beoordelingsschema bij een volgende cursus

In een volgende cursus heeft een nieuwe groep studenten dezelfde opdracht gekregen waarbij ze naast de vijf voorbeeldartikelen via het beoordelingsschema geïnstrueerd werden.
Dit leidde tot de volgende conclusies.

- Het gebruik van een beoordelingsschema stimuleert tot het zetten van een aantal onderzoeksstappen van de onderzoekscyclus: van formuleren van een praktijkprobleem tot en met de ontwerpfase. Studenten kunnen elkaar daarin goed feedback geven.
- Deze aanpak leidde tot artikelen met een meer gedegen onderzoeksmatige opzet.
- Studenten werden meer aangezet hun vakdidactische literatuur te gebruiken.
- De kwaliteit van de analyse van de literatuur blijft een lastig punt, dat niet eenvoudig beoordeelbaar is. Inbreng van een vakdidacticus is noodzakelijk. Het blijft een vraag of op dit punt het beoordelingsschema zo verbeterd kan worden, dat ook studenten elkaar beter kunnen ondersteunen.
- Het laten schrijven van een artikel door studenten in jaar 3 is een goede oefening voor een praktijkonderzoek in jaar 4.

Van afsluitende opdracht naar het begin van een vakdidactisch gesprek

Studenten geven aan door deze opdracht gerichter en meer gedegen naar problemen van leerlingen te kijken. Het lezen en bespreken van de voorbeeldige artikelen van andere studenten, als casussen, is een geschikte startactiviteit. Een enkel groepje organiseerde naast schriftelijke communicatie en een bespreking. De auteur hield een nagesprek met één van de groepjes. Het voeren van gesprekken met medestudenten over de zelf beschreven casussen wordt zinnig gevonden. Er valt veel winst te behalen door (voorlopige) producten te bespreken in een klassikale setting onder docentbegeleiding.
Het opstellen van een *consistent* verhaal lijkt een goed hanteerbaar eerste kwaliteitscriterium te zijn, het *doorstaan van een discussie* erover een goed tweede criterium en *een toetsing aan de onderwijspraktijk* een derde. Aan de eerste twee criteria kan in het kader van deze onderzoeksoefening voldaan worden. Aan het derde veelal niet: een de volgende gelegenheid voor uitvoering van het ontwerp is vaak pas een jaar later.
Het artikel zou niet het eindpunt van een onderwijstraject moeten zijn, maar juist een casusbeschrijving, die in een cursusbijeenkomst wordt ingebracht. De indeling van de cursus Vakdidactiek Algebra wordt op dit punt herzien. Verzamelen van meer artikelen kan leiden tot een verzameling van 'good practices'.

Bruikbaarheid voor wiskundedocenten en wiskundesecties

De vraag blijft of studenten voldoende rijpheid hebben om zo'n onderzoeksopdracht en verder praktijkonderzoek succesvol uit te voeren. Het is wenselijk dat dit soort activiteiten in de uitoefening van het beroep doorgang vindt en juist door of onder leiding van ervaren docenten wordt uitgevoerd.
Er zijn wiskundesecties waar op de agenda naast organisatorische punten ook vakdidactische gesprekken staan. Gedegen voorbereiding verhoogt de kwaliteit, evenals gebruik van literatuur, om te beginnen bijvoorbeeld literatuur als genoemd in de noten. Voorbeeldartikelen als de voorgaande vijf artikelen van deze serie en het stappenplan van figuur 4 kunnen verder behulpzaam zijn.
Wenselijk zijn netwerken van docenten of een nascholingskader waar dit soort inbreng en uitwisseling van docenten wordt gestimuleerd. Wie belangstelling heeft kan zich melden bij de auteur.

Verwerkingsopdracht Artikel Algebra
Voor een drie/viertal: verwerk per persoon elementen uit de samenvatting, de literatuur en de cursus tot een **artikel** over Algebraonderwijs, met de omvang van 2000 woorden. Bij voorkeur bevat het ervaringen met leerlingen m.b.t. bepaalde opgaven/leerstof. Becommentarieer het artikel van de anderen.
Suggestie voor de globale structuur van een artikel:
Een (of meer) situatiebeschrijving(en)
Daarbij een probleemstelling
Analyse
Beschrijving van enige overwegingen, alternatieven met voor en nadelen
Een standpunt, voornemen, actie
Eventueel met resultaat van uitvoering en daar weer reflectie op.

figuur 3

Noten

[1] Interne notitie ILS-HAN (21 maart 2013); te bevragen bij de auteur.
[2] Zie: *www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Samenwerkingsgroep_Lerarenopleiding_Wiskunde_2e_graads*
[3] T. Faes e.a. (2011): *Het leren van wiskunde – Leren effectief lesgeven*. Utrecht: APS.
[4] J. Faarts, e.a. (2012): *Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding*. Utrecht: APS.
[5] A. van Streun (2012): *Wiskunde leren en onderwijzen*. In: P. Drijvers e.a.: *Handboek wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
[6] C. van der Donk, B. van Lanen (2012): *Praktijkonderzoek in de school*. Bussum: Coutinho.

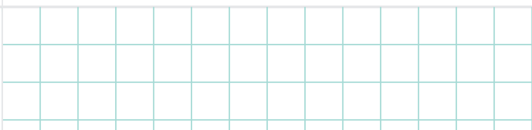
[7] Met dank aan collega Frank Derks voor kritisch commentaar.

Info

Eerder verschenen afleveringen (de naam van de student-auteur is als laatste vermeld):
deel 1, in: *Euclides* 88(2), pp. 70-72, Robert Verheijen
deel 2, in: *Euclides* 88(3), pp. 110-112, Olaf Gosselink
deel 3, in: *Euclides* 88(4), pp. 158-161, Elsmariken Jansen
deel 4, in: *Euclides* 88(5), pp. 214-216, Gert Hoogeboom
deel 5, in: *Euclides* 88(6), pp. 270-273, Rianne Florijn

Over de auteur

Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde.
E-mailadres: *Ton.Konings@han.nl*



Beoordelingsschema voor klein ontwerponderzoek vakdidactiek algebra

	Onvoldoende (4)	Voldoende (6)	Goed (8)	Voorbeeldig (10)	X gewicht	= punten
1. **Probleemsituatie** probleemsituaties, probleemverheldering (context, leerstof)	Het artikel bevat meerdere van onder 'Goed' genoemde punten.	Het artikel mist een enkel punt van onder 'Goed' genoemde punten.	Het artikel geeft - concrete beschrijvingen van - met elkaar samenhangende - relevante en - herkenbare - problemen van leerlingen met algebraleerstof.	…, en deze problemen horen bij een complexe begripsmatige problematiek (bijv. met complexe achtergrond en dilemma's).	2	
2a. **Analyse vanuit de leerstof** (de volgorde van 2a en 2b kan afhankelijk van het onderwerp verschillen)	In de analyse wordt de essentie van de leerstof niet goed weergegeven.	Het artikel bevat een bondige, maar niet treffende analyse van de opbouw van de leerstof. Of te uitvoerig, bijv. door herhaling.	Het artikel bevat een bondige, doeltreffende analyse van de opbouw van de leerstof in de schoolmethode. Met oog voor kernconcepten en didactische modellen.	…, inclusief relevante voorkennis en vervolgstof.	2	
2b. **Analyse vanuit de literatuur**	In het artikel worden niet juiste relaties met passages uit het cursusboek opgenomen.	Het artikel is onvolledig of niet geheel adequaat in de analyse vanuit het cursusboek, en bevat overbodige passages.	Het artikel bevat een bondige weergave van relevante passages (met paginaverwijzing) uit het cursusboek, met een adequate vertaling naar de probleemsituaties.	…, en daarnaast analyse vanuit aanvullende zelfgezochte vakdidactische literatuur met duidelijke meerwaarde.	2	
3. **Probleemstelling** De kern van het probleem, conclusie en standpunt	De student kan niet de kern van het probleem samenvatten.	De student kan het probleem samenvatten, maar de conclusies volgen niet geheel uit het voorgaande.	De student vat de kern van het probleem samen en geeft een standpunt in globale termen. (In het algemeen betreft dit ontwikkeling van inzicht én basisvaardigheid.)	… en daarbij worden door de student zelf verrassende relaties gelegd.	2	
4. **Voornemens** tot actie en **ontwerpeisen** aan een ontwerpproduct	De voornemens van de student zijn helemaal niet consistent met het voorgaande of met aanwijzingen in het cursusboek.	De voornemens van de student zijn niet geheel consistent met het voorgaande of met aanwijzingen in het cursusboek.	De student geeft met behulp van aanwijzingen in het cursusboek een aantal mogelijke oplossingen voor de problemen (bij een volgende behandeling van deze leerstof), en formuleert eisen waaraan deze oplossingen moeten voldoen.	…, bovendien worden zelfbedachte of elders opgezochte suggesties genoemd, die consistent zijn met het voorgaande.	2	
5. **Ontwerpproduct** (werkblad(en), instapopdracht, ICT-gebruik, gevarieerde productieve oefening, overzicht op digibord, …)	Het ontwerp past helemaal niet bij de ontwerpeisen.	Het ontwerp voldoet niet geheel aan de ontwerpeisen, of voegt te weinig toe aan bestaande materialen.	De student werkt op basis van elders gevonden ontwerpproducten een voornemen uit in een ontwerp dat voldoet aan de ontwerpeisen.	… idem, maar met volledig eigen ontwerp.	1	

figuur 4

Wie wat bewaart, heeft wat

HET ARCHIEF VAN WIMECOS EN NVVW

[Harm Jan Smid]

Een beetje vereniging houdt een archief bij. Notulen en verslagen, ingekomen en uitgegane post, agenda's en programma's zijn zo de zaken die je in de regel in een verenigingsarchief aantreft. En als het een beetje meezit, vind je er ook nog onverwachte papieren en documenten in terug, die een verrassend en soms onbedoeld licht op het verleden werpen. Altijd leuk, grasduinen in een archief!

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en haar voorganger, de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen (met later daaraan toegevoegd: en Lycea), in de wandeling Wimecos geheten, heeft dus ook in de 87 jaar dat ze nu bestaat, een archief bijgehouden. Het spreekt niet helemaal vanzelf dat het archief nog altijd aanwezig is. Het archief van de 'Groep leeraren in de wiskunde en natuurkunde aan Nederlandsche gymnasia en lycea', ofwel Liwenagel, is bij het beruchte bombardement op het Bezuidenhout in Den Haag in maart 1945 in vlammen opgegaan; daarvan resteert alleen nog een klein deel van de jaren na de oorlog.

Maar van Wimecos en NVvW resteert nog heel veel. Hoewel een oud-secretaris van de vereniging laatst tegen mij zei dat hij het archief maar 'waardeloos' vond omdat er zoveel ontbrak, denk ik dat dat wel meevalt. Complete archieven bestaan nu eenmaal niet en verreweg het meeste zal er toch wel zijn.

Wat moeten we met het archief?

Het bijhouden van een verenigingsarchief is meestal de taak van de secretaris en dat is hier niet anders. Vanaf de eerste secretaris, J.H. Schogt, tot de huidige, Kees Lagerwaard, is veel verzameld en bewaard, met als resultaat een steeds aangroeiende hoeveelheid documenten. Die werden bewaard in tientallen archiefdozen in een opslagruimte ten huize van de administratrice van de vereniging, Elly van Bemmel-Hendriks. Dat was natuurlijk geen ideale situatie. Niet dat het daar niet goed bewaard werd – in tegendeel, het archief was in prima conditie – maar echt veilig is zoiets natuurlijk niet. Niet dat we nu direct weer bombardementen hoeven te vrezen, maar een echt archiefgebouw is natuurlijk brandveiliger. Belangrijker is dat het archief niet goed toegankelijk was, en dat zou je toch wel graag willen. Als je onderzoek naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs doet, wil je ook de rol van de beroepsvereniging van de wiskundeleraren daarbij betrekken en dan moet je natuurlijk het archief kunnen raadplegen.

Er waren dus goede redenen om het archief van de NVvW naar een openbare instelling, waar archieven op een professionele manier bewaard en beheerd worden, over te brengen.

Nu gaat dat niet zomaar. Een archiefinstelling heeft zo zijn eisen op het gebied van verpakking en opslag. Ze willen er bijvoorbeeld geen metaal en geen plastic in, en alles moet verpakt zijn in zuurvrij papier en karton. Het belangrijkste is dat een archief op een behoorlijke manier geordend en beschreven moet zijn, zodat een onderzoeker er de weg kan vinden. De tijd dat een archiefinstelling zoiets voor je deed, ligt allang achter ons; daar hebben ze de menskracht niet meer voor. Je moet dus een archief afleveren volgens de normen van de instelling en anders nemen ze het niet aan. Zo'n archief moet bovendien een beetje passen bij de andere archieven die in die archiefinstelling al aanwezig zijn.

Nu was dat laatste makkelijk op te lossen. Het Noord-Hollands Archief in Haarlem is het centrum voor Nederlandse wetenschapsarchieven. Er zijn een aantal persoonlijke archieven van wiskundigen, onder andere die van Freudenthal en Wansink, maar ook het archief van het Wiskundig Genootschap berust daar. Het NVvW-archief past goed in hun collectie.

Er is in de jaren negentig al sprake is geweest van het overbrengen van het NVvW-archief naar Haarlem, maar daar is toen niets van gekomen. Nu dus wel.

Ordenen en beschrijven

Het allerbelangrijkste wat dus moest gebeuren was het op orde brengen en beschrijven van het archief. 'Op orde brengen' suggereert misschien dat het een rommeltje was, maar dat bedoel ik daar niet mee. Het overgrote deel van het archief was chronologisch geordend en netjes in ordners en mappen bewaard. Er zat dus wel systeem in, maar een zuiver chronologische ordening geeft natuurlijk weinig inzicht in de inhoud van een archief. Een onderzoeker die over bepaalde onderwerpen wat wel weten, heeft dan een hele toer daar iets over te vinden. Het materiaal moest dus geordend worden in rubrieken.

Nu liggen bij een verenigingsarchief bepaalde rubrieken wel voor de hand. Bestuursnotulen, verslagen en stukken rond algemene ledenvergaderingen, ingekomen en uitgegane post waren rubrieken die al op voorhand bedacht konden worden, en al uitzoekende wordt dan vanzelf wel duidelijk welke rubrieken nog meer van nut kunnen zijn. Er was bijvoorbeeld nogal wat correspondentie en andere stukken rond het tijdschrift *Euclides*, en al snel is dus de beslissing genomen om daarvoor een aparte rubriek te creëren. Hetzelfde geldt voor de ledenadministratie. Vooral vanaf de jaren zeventig belandde er een grote hoeveelheid documenten van allerlei commissies, werkgroepen, samenwerkingsverbanden en organisaties in het archief. Dat is allemaal bij elkaar gebracht in een rubriek 'Diverse stukken en documenten' en in de inventaris is beschreven om welke stukken het gaat. Een onderzoeker die iets wil weten over de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' of over de verschillende nomenclatuurrapporten die de vereniging geproduceerd heeft, kan die snel vinden.

Bij het doornemen van het archief bleek ook dat sommige secretarissen wel erg veel bewaard hadden. Zaken als onleesbare of onbegrijpelijke kladjes, reclamefolders, brieven of stukken in twee- of drievoud, of documenten die eigenlijk geen verband met het wiskundeonderwijs hadden, zijn

met toestemming van de huidige secretaris uit het archief verwijderd, zo'n 10% van het geheel. Wat overbleef waren 34 archiefdozen, bij elkaar ongeveer 3 meter, en 8 cahiers met financiële overzichten van een zo groot formaat dat ze niet in dozen pasten. Op het laatste moment kwam nog een mooie vondst boven water: het complete kaartsysteem met de ledenadministratie van de jaren 1937-1969. De inventaris van het archief is, behalve natuurlijk bij het Noord-Hollands Archief, ook te vinden op de website van de NVvW, bij de Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs.

Wimecos voor en na de oorlog

Historici zeggen altijd dat het geen zin heeft zomaar in een archief te bladeren (hoe leuk ook), maar dat je alleen maar wat aan een archief hebt als je er met gerichte vragen mee aan de slag gaat. Dat heb ik niet gedaan; mijn taak was het archief zo te organiseren dat het aan het Noord-Hollands Archief overgedragen kon worden. Maar al doende krijg je natuurlijk toch wel een impressie van het reilen en zeilen van Wimecos en NVvW.
De eerste impressie is dat Wimecos in de vooroorlogse jaren niet zo heel veel voorstelde. De vereniging is opgericht omdat men het belangrijk vond dat de wiskundeleraren aan de HBS een eigen organisatie hadden. Kennelijk had men het gevoel dat men binnen de algemene vereniging van leraren aan de HBS, de AVMO, onvoldoende aan bod kwam. Maar was dat nu echt zo? Terwijl voor die tijd leerplancommissies voor HBS en gymnasium, ook voor wiskunde, vaak uit de algemene verenigingen voor die schooltypes voortkwamen, ging de instelling van de fameuze commissie Beth-Dijksterhuis geheel buiten Wimecos om. Wimecos schreef zo nu en dan een beleefde brief aan de inspecteur of aan de minister en men kwam eens per jaar bij elkaar om naar enkele interessante voordrachten te luisteren en daarover te discussiëren, en dat was het zo ongeveer. Veel invloed had men niet, getuige de volgende mistroostige opmerkingen uit de notulen van de ledenvergadering van 1933: 'We hebben alle moeite gedaan om in ons wiskundeonderwijs veranderingen, vernieuwingen en verbeteringen aan te brengen, echter zonder veel resultaat. We hebben adressen gestuurd, zonder resultaat.' Er was zelfs geen eigen tijdschrift, want over het in dezelfde tijd opgerichte *Euclides* had Wimecos niets te vertellen.
Nu is het lastig om precies na te gaan wat Wimecos in die jaren deed. Bestuursnotulen zijn er niet; die werden pas vanaf 1949 gemaakt. Er zijn alleen verslagen van de algemene ledenvergaderingen. De ingekomen en uitgegane post is pas bewaard vanaf 1937, op een enkel afschrift na. Het is dus moeilijk de activiteiten van Wimecos in de vooroorlogse jaren op waarde te schatten. Maar mijn indruk is dat de wiskundeleraren op de gymnasia, die zich samen met de natuurkundeleraren als groep binnen het Genootschap van Leraren aan de Gymnasia georganiseerd hadden, niet slechter af waren.
De marginale positie van Wimecos veranderde in de jaren vijftig. Dat was vooral de verdienste van Johan Wansink, die in 1949 toetrad tot het bestuur. Wansink was zijn loopbaan begonnen als onderwijzer, haalde een aantal onderwijsaktes en kreeg bij grote uitzondering toestemming voor een academische studie die hij in 1931 bekroonde met een promotie. Het was dus een man die het onderwijs grondig kende en een goed wiskundige, maar het belangrijkste was dat hij een veel bredere kijk op onderwijs had dan zijn medebestuurders uit die tijd én dat hij een bekwaam en tactvol bestuurder was. Wansink boekte twee belangrijke resultaten. Toen na de oorlog de impasse rond de vernieuwing van het wiskundeonderwijs leek voort te duren, werden door twee groepen van buiten de HBS initiatieven genomen. Zowel Liwenagel als de Werkgroep voor Vernieuwing van het Wiskundeonderwijs publiceerden voorstellen voor een gecombineerd gymnasium-HBS-programma. Hoewel de voorzitter van Wimecos in eerste instantie hier weer afhoudend op reageerde, wist Wansink het bestuur over te halen zelf het initiatief voor een nieuw programma te nemen. Dat leidde uiteindelijk tot het Wimecos-programma van 1958. Het was niet alleen belangrijk dat het Wimecos-programma eindelijk een bescheiden vernieuwing bracht; het werken aan dat programma bracht ook HBS- en gymnasiumdocenten, en conservatieven en vernieuwers tot elkaar. Bovendien werden de leden van Wimecos bij de vaststelling van het programma betrokken. De map met de stukken en het verslag van de buitengewone ledenvergadering van Wimecos in 1955 over de voorgestelde leerplannen is voor mij dan ook een hoogtepunt uit het Wimecos-archief.
De tweede grote verdienste van Wansink was hij dat hij *Euclides* wist om te vormen tot het orgaan van de vereniging en een echt blad voor leraren. *Euclides* was vanaf de oprichting in 1924 tot het begin van de vijftiger jaren het geestelijk eigendom geweest van Piet Wijdenes. Die was zeker een man met verdiensten, maar zijn visie op wiskundeonderwijs was heel beperkt en hij had weinig behoefte om in *Euclides* ruimte te bieden voor een andere visie dan de zijne. Wijdenes verloor in de jaren vijftig zijn greep op het tijdschrift. Wansink kwam namens Wimecos in de redactie en werd later zelf hoofdredacteur. Wansink en zijn opvolger, Gerrit Krooshof, hebben van het blad gemaakt wat het nu nog is: een verenigingorgaan en een onmisbaar vakblad voor de wiskundeleraar. Het is dan ook geen toeval dat de rubriek *Euclides* in het archief start met het jaar 1954, toen de bemoeienis van Wimecos met *Euclides* veel groter werd.

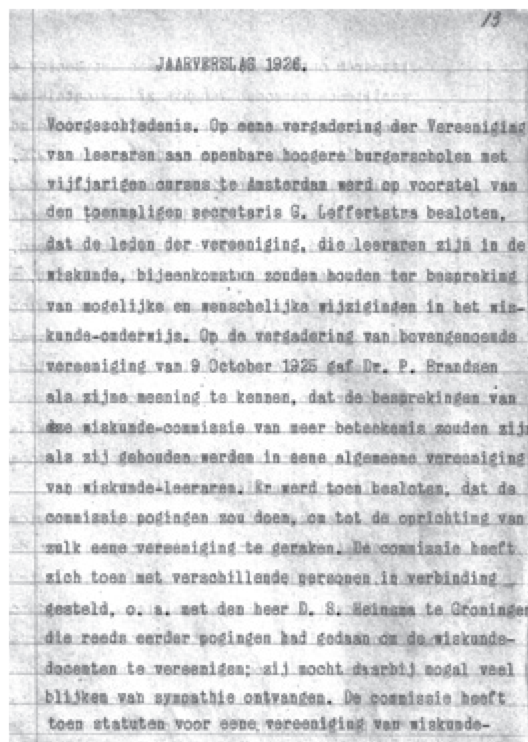
De NVvW

De overgang van Wimecos naar NVvW was veel meer dan een naamsverandering. Wimecos was een gesloten club van leraren die lesgaven aan een HBS – aanvankelijk mochten zelfs gepensioneerden geen lid blijven – terwijl de NVvW zich ontwikkelde tot een tamelijk open vereniging waarvan in de praktijk iedereen met belangstelling voor het wiskundeonderwijs lid kan worden.
Ook de wereld van het onderwijs veranderde. Tot in de jaren zestig waren de inspecteurs diegenen die echt de macht hadden. De 'wiskunde-inspecteurs' werden dan ook altijd op de jaarvergaderingen uitgenodigd en daar speciaal welkom geheten. Het verenigingsbestuur vergaderde minstens één keer per jaar met de inspectie. Die contacten werden langzamerhand minder frequent. Vanaf de jaren zeventig ging het ministerie zelf een steeds actievere rol spelen en in de notulen en andere stukken van het archief is dat duidelijk terug te zien. Daarnaast krijgt de 'verzorgingsstructuur' die om het onderwijs heen ontstaat, steeds meer invloed, vooral als ontwikkelaar en uitvoerder van allerhande projecten. De vereniging speelt daarbij wel een rol, maar geen leidende meer. Begeleiden, bijsturen,

adviseren, lobbyen en waarschuwen worden belangrijke activiteiten, nuttig, maar niet altijd even aansprekend. 'Als bestuur hebben we in bijna alle commissies gezeten die zich bezig hielden met alles wat ook maar met cTWO te maken heeft gehad' staat in de notulen van november 2007, maar daar wordt wat mistroostig aan toegevoegd dat de wiskundedocenten daarvoor nauwelijks belangstelling opbrachten. De situatie is totaal anders, maar de toon doet toch een beetje denken aan die van de jaarvergadering van 1933!

Het blijft een lastige uitdaging docenten duidelijk te maken dat je als beroepsvereniging meer bent dan één van die schimmige spelers in het Nederlandse poldermodel.

Hoe laat je zien dat de vereniging er werkelijk toe doet en dat je af en toe het verschil kan maken? De geschiedenis van Wimecos/NVvW, na te lezen in haar archief, laat zien dat dat, hoewel lang niet altijd, soms toch lukte. Alleen al daarom is het mooi dat het archief bewaard en voor volgende generaties toegankelijk blijft!



13

JAARVERSLAG 1926.

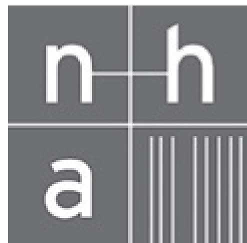
Voorgeschiedenis. Op eene vergadering der Vereeniging van leeraren aan openbare hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus te Amsterdam werd op voorstel van den toenmaligen secretaris G. Leffertstra besloten, dat de leden der vereeniging, die leeraren zijn in de wiskunde, bijeenkomsten zouden houden ter bespreking van mogelijke en wenschelijke wijzigingen in het wiskunde-onderwijs. Op de vergadering van bovengenoemde vereeniging van 9 October 1925 gaf Dr. P. Brandsen als zijne meening te kennen, dat de besprekingen van deze wiskunde-commissie van meer beteekenis zouden zijn als zij gehouden werden in eene algemeene vereeniging van wiskunde-leeraren. Er werd toen besloten, dat de commissie pogingen zou doen, om tot de oprichting van zulk eene vereeniging te geraken. De commissie heeft zich toen met verschillende personen in verbinding gesteld, o. a. met den heer D. S. Heinsma te Groningen die reeds eerder pogingen had gedaan om de wiskunde-docenten te vereenigen; zij mocht daarbij mogal veel blijken van sympathie ontvangen. De commissie heeft toen statuten voor eene vereeniging van wiskunde-

figuur 1 Fragment uit het jaarverslag 1926, waarin iets meer te vinden is over de ontstaansgeschiedenis van Wimecos. Misschien speelde ook een rol dat er in de jaren twintig steeds meer HBS'en op katholieke en protestantse grondslag ontstonden. De wiskundeleraren van die scholen werden meestal geen lid van de AVMO maar van lerarenorganisaties op levensbeschouwelijke grondslag. Ze werden wél lid van Wimecos, waarin het verschil in levensbeschouwing geen rol speelde.

6.WANSINK vraagt hoe onze relatie tot EUCLIDES precies is.Nu SCHOGT aftreedt als Redacteur vindt hij het moment gekomen om in de Redactie iemand namens de verenigingen van Wiskundeleraren(WIMECOS en LIWENAGEL) op te nemen.Als WIJDENES al definitief een opvolger voor SCHOGT mocht hebben, zal gevraagd worden,ev een derde redacteur aan te stellen.Een brief aan WIJDENES in deze geest zal worden verzonden.

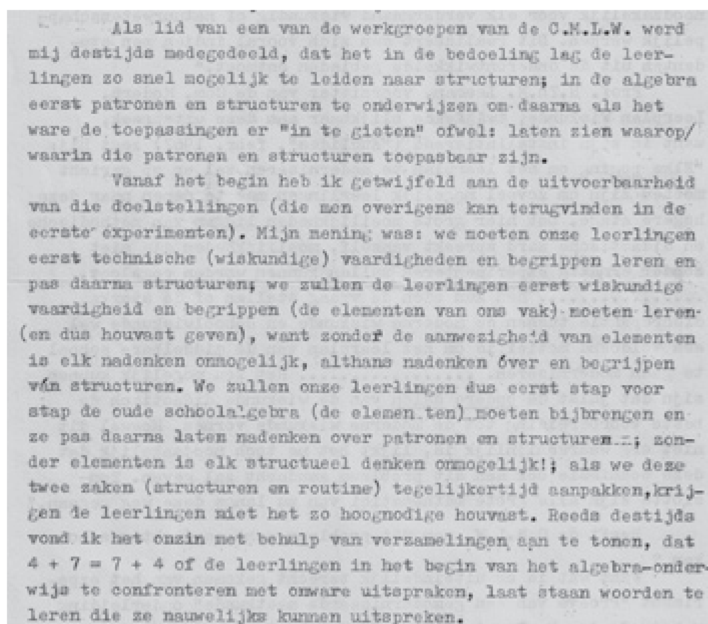
Voorts vraagt Wansink om aan de Werkgroep voor Wiskunde van de W.V.O. een verzoek te richten tot het schrijven van een samenvattend artikel over het werk dat deze groep tot dusver heeft verzet De overige bestuursleden zijn hier niet zonder voorbehoud voor.Besloten wordt aan de Werkgroep te vragen om een samenvattend verslag om naar aanleiding hiervan in EUCLIDES te rapporteren.

figuur 2 Twee stukjes uit de bestuursnotulen van de vergadering van 10 februari 1949, de eerste waarbij Johan Wansink aanwezig was. Hij zorgde ook voor de notulen; tot nu toe werden die niet gemaakt. Hij maakte al direct duidelijk wat hij wilde: invloed krijgen bij het tijdschrift 'Euclides' en een veel opener benadering van groepen buiten Wimecos met andere ideeën over wiskundeonderwijs. Vooral dat laatste stuitte in het begin op heel wat weerstand.



Info

Noord-Hollands Archief
Vestiging voor raadplegen van het NVvW-archief:
Kleine Houtweg 18 / 2012 CH Haarlem
tel. 023 5172700
Openingstijden: dinsdag en donderdag van 9:00-17:00u



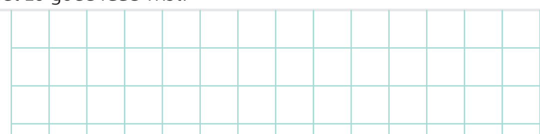
Als lid van een van de werkgroepen van de C.M.L.W. werd mij destijds medegedeeld, dat het in de bedoeling lag de leerlingen zo snel mogelijk te leiden naar structuren; in de algebra eerst patronen en structuren te onderwijzen om daarna als het ware de toepassingen er "in te gieten" ofwel: laten zien waarop/ waarin die patronen en structuren toepasbaar zijn.

Vanaf het begin heb ik getwijfeld aan de uitvoerbaarheid van die doelstellingen (die men overigens kan terugvinden in de eerste experimenten). Mijn mening was: we moeten onze leerlingen eerst technische (wiskundige) vaardigheden en begrippen leren en pas daarna structuren; we zullen de leerlingen eerst wiskundige vaardigheid en begrippen (de elementen van ons vak) moeten leren (en dus houvast geven), want zonder de aanwezigheid van elementen is elk nadenken onmogelijk, althans nadenken óver en begrijpenván structuren. We zullen onze leerlingen dus eerst stap voor stap de oude schoolalgebra (de elementen) moeten bijbrengen en ze pas daarna laten nadenken over patronen en structuren.; zonder elementen is elk structueel denken onmogelijk!; als we deze twee zaken (structuren en routine) tegelijkertijd aanpakken,krijgen de leerlingen niet het zo hoognodige houvast. Reeds destijds vond ik het onzin met behulp van verzamelingen aan te tonen, dat 4 + 7 = 7 + 4 of de leerlingen in het begin van het algebra-onderwijs te confronteren met onware uitspraken, laat staan woorden te leren die ze nauwelijks kunnen uitspreken.

figuur 3 Fragment uit een brief van D. van den Haak, wiskundeleraar te Oegstgeest. In december 1974 startte hij een actie tegen de vernieuwingen van de 'New Math' en het IOWO, dat daar toen nog mee geassocieerd werd. Van den Haak claimde dat hij meer dan duizend adhesiebetuigingen voor zijn actie 'Wiskobàh' kreeg, maar in het NVvW-archief is daarvan weinig terug te vinden. De notulen wekken de indruk dat het toenmalige bestuur met deze actie niet zo goed raad wist.

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is voorzitter van de Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs (WGRWO) van de NVvW.
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*



Was vroeger de toekomst beter?

[Danny Beckers]

Op zaterdagochtend 27 april j.l. werd in de prachtige Janskerk te Haarlem, onder het toeziend oog van een dertigtal aanwezigen, de schenking van het archief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren aan het Noord-Hollands Archief officieel getekend. De gelegenheid werd opgeluisterd door een vijftal korte praatjes.

Het openingswoord werd om 11 uur gevoerd door Lieuwe Zoodsma, de directeur van het Noord-Hollands Archief. Hij vertelde ons over het archief, de collecties en de oudste kerk van Haarlem, waar deze plechtige gelegenheid plaats vond. Hij werd gevolgd door Harm Jan Smid (***zie foto 1***), gepensioneerd wiskundelerarenopleider, historicus van het wiskundeonderwijs, en één van de voortrekkers binnen de nieuwe NVvW-werkgroep Geschiedenis (WGRWO). Aan hem was de gehele bijeenkomst in wezen te danken, want hij had er in de afgelopen jaren voor gezorgd dat het archief verzameld en geordend was. Hij vertelde dat hij sinds zijn pensionering geregeld mensen was tegengekomen die hem, geheel in de geest van onze tijd, vroegen wat hij voor vrijwilligerswerk deed. Wanneer hij dan – naar waarheid – antwoordde dat hij bezig was met het ordenen van het archief van onze vereniging, dan was de reactie veelal weinig enthousiast. De meeste Nederlanders stellen zich bij het vrijwilligerswerk van onze gepensioneerden echt iets anders voor, constateerde Harm Jan.

Nadat Harm Jan de aanwezigen over een paar van de highlights in het archief had verteld, werden we getrakteerd op een verhaal van Marco Tompitak, student theoretische fysica aan de VU, en student-assistent bij wetenschapsgeschiedenis aan de VU (***zie foto 2***). Hij vertelde ons over een archiefvondst, waaruit bleek dat de fysici in de jaren twintig van de vorige eeuw een vriendje hadden in de Onderwijsraad, die stiekem overheidsinformatie lekte in de richting van de Nederlandse Natuurkunde Vereniging. De natuurkundigen hoopten daarmee hun voordeel te doen in hun onenigheid met de HBS-docenten over de uren mechanica. Die werden namelijk door wiskundedocenten gegeven, terwijl de fysici op urenuitbreiding aasden. Met deze archiefvondst onderstreepte hij het belang van goed bewaarde archieven voor de geschiedschrijving.

Het verhaal over dat lek bij de Onderwijsraad werd sportief opgepakt door Adrie van der Rest, secretaris-directeur van de Onderwijsraad. Hij vertelde ons wat volgens de raad de rol is van beroepsverenigingen van leraren in het huidige onderwijsbestel en hield daarbij de huidige koers van de NVvW tegen het licht. Tot grote opluchting van onze huidige voorzitster, Marian Kollenveld, die vervolgens het woord mocht nemen, kwam de vereniging er daarbij helemaal niet beroerd af.

Marian was uiteraard ook qualitate qua aanwezig om, namens de vereniging, een handtekening te plaatsen, die de overdracht van het archief officieel maakte (***zie foto 3***).

Om stipt 12:15 uur konden de aanwezigen zich laven aan de borrel om deze gelegenheid ook inofficieel nog eens te beklinken. Voor iedereen die interesse heeft in onderwijsgeschiedenis, is het bestaan van dit soort archieven geweldig; voor mensen met interesse in de geschiedenis van onze vereniging is het helemaal een zegen. Maar als deze ceremonie iets illustreerde, dan is het niet eens zozeer dat onze vereniging een rijke geschiedenis heeft, hoewel die zeker de moeite van het beschrijven waard is; de bijeenkomst toonde vooral ook dat onze vereniging een zeer interessante toekomst heeft, die het lidmaatschap helemaal de moeite waard maakt. Het is in elk geval prettig om te weten dat het archief van de vereniging nu in goede handen is, in het Noord-Hollands Archief te Haarlem.



foto 1 Harm Jan Smid: aanleiding voor een feestje



foto 2 Marco Tompitak ontmaskert een lek



foto 3 Ondertekening van de overdracht door Marian Kollenveld en Lieuwe Zoodsma

Fotografie
Henk van der Kooij

Over de auteur
Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs en is hij actief lid van de WGRWO.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

ICT in de wiskundeles

MAAR DIT IS TOCH GEEN ALGEBRA?

[Marc de Hoog]

Het zal veel docenten bekend voorkomen: leerlingen die bij een algebraonderwerp vragen: 'Wat heb ik eraan?' Voor zijn opleiding heeft Marc de Hoog een lessenserie gemaakt waarin leerlingen met behulp van applets algebra toepassen bij het afleiden van oppervlakteformules. In dit artikel laat hij zien hoe zo'n les over de oppervlakte van een parallellogram opgebouwd is.

Bij algebraonderwerpen kun je veelvuldig gebruik maken van getallenvoorbeelden, plaatjes (o.a. het oppervlaktemodel), et cetera om een en ander concreter te maken, maar de vraag 'Waar heb je het voor nodig?' zullen de leerlingen toch blijven stellen. Tijdens mijn opleiding heb ik het artikel *Oefening baart kunst* van Martin Kindt gelezen, waarin onder andere suggesties worden gedaan om op zinvolle wijze aan algebra te werken. Een van de suggesties die gedaan worden, is 'dat sommige meetkundehoofdstukken een uitstekend oefenterrein voor algebravaardigheden bieden' (zie [1], pag. 132). Deze lessenserie, die ik heb geschreven als onderdeel van mijn afstudeerwerk 'Wiskunde@ELO' (Hogeschool Rotterdam, 2009), is ontwikkeld vanuit dat perspectief. De leerlingen uit 2-havo leren tijdens deze lessen zelf de formules voor de oppervlakte van het parallellogram, de oppervlakte van het trapezium en de oppervlakte van de cirkel af te leiden. De lessenserie wordt gegeven via de elektronische leeromgeving, omdat ik enkele applets heb ontwikkeld die de leerlingen kunnen helpen bij het vinden van de formule. In dit artikel ga ik nader in op de les over het afleiden van de formule van de oppervlakte van het parallellogram. De les bestaat uit vier delen: een opgave om de gedachte te sturen, getallenvoorbeelden, een opgave om de formule af te leiden en een werkblad.

Opgave om de gedachten te sturen

De opdracht 'Leid een formule voor de oppervlakte van een parallellogram af' is voor een leerling uit 2-havo te abstract. Voordat deze opdracht gegeven kan worden, moet de leerling zich eerst een globaal beeld vormen van de opdracht. Daarvoor laat ik de leerlingen eerst aan een inleidende opgave werken, die afgebeeld is ***in figuur 1***. Het komt erop neer dat de leerling met het applet 'speelt' en op deze wijze ontdekt welke figuur ontstaat en wat het verband is tussen de nieuwe en de oorspronkelijke figuur.

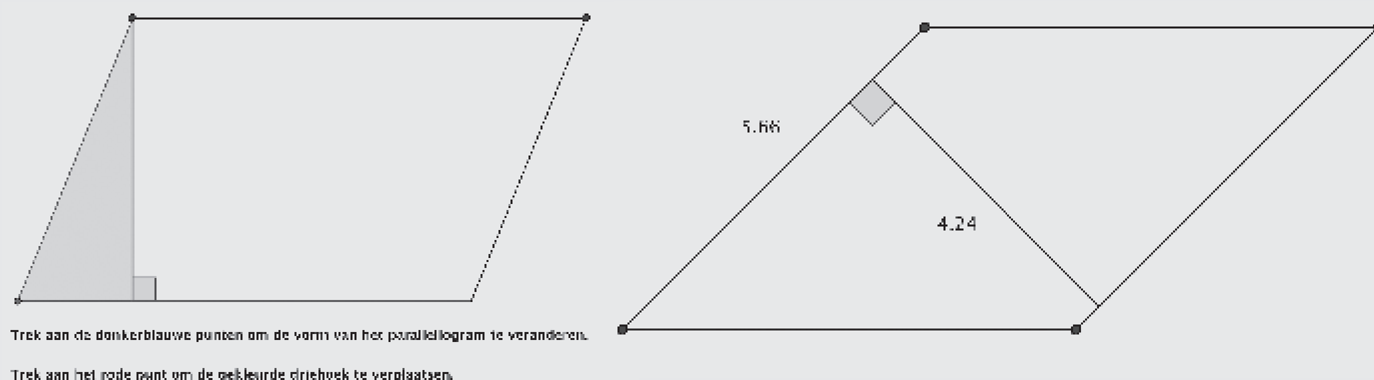
Getallenvoorbeelden

Het globale beeld dat de leerling heeft gevormd op basis van de inleidende opdracht, moet vervolgens vervangen worden door een nauwkeuriger beeld. In *Wiskundeonderwijs in de basisvorming* lezen we dat 'in het leren van wiskunde een basispatroon zit dat steeds opnieuw wordt doorlopen': probleem, herstructureren van de probleemsituatie, samenklonteren van probleemsituaties tot een beeld, expliciet maken van het beeld.[2]

In figuur 2 is één van de getallenvoorbeelden weergegeven. De opdracht is het berekenen van de oppervlakte van het parallellogram met behulp van het applet (het probleem). Dit is aanleiding het probleem te herstructureren. In dit geval komt dat neer op het maken van een rechthoek door aan het rode punt te trekken. Vervolgens moet de oppervlakte van de rechthoek berekend worden. Op deze wijze is ook de oppervlakte van het parallellogram bekend. Daarbij moet de leerling gebruikmaken van z'n voorkennis over de oppervlakte van een rechthoek en de antwoorden op de vragen in de inleidende opdracht.

Meerdere van deze getallenvoorbeelden klonteren samen tot een beeld. Dit beeld moeten leerlingen expliciet maken. Dit realiseer ik door leerlingen te vragen naar het idee achter de methode. Soms vraag ik om dit te vertellen, soms laat ik het opschrijven. Ook heeft de ervaring geleerd dat leerlingen het goed aan elkaar kunnen uitleggen: 'Je moet eerst een rechthoek maken, daar de oppervlakte van berekenen en dat is ook de oppervlakte van het parallellogram.'

Leerlingen die in staat zijn dergelijke redeneringen te doen, zijn zich bewust van het beeld, kunnen het benoemen en het beschrijven. De beeldvorming is 'afgerond'. Het parallellogram ***in figuur 2*** is voor sommige leerlingen een extreem voorbeeld. Ze zien in het begin niet hoe dit een rechthoek moet worden. Ik vraag dan wat de leerling in de vorige opgave gedaan heeft (op zoek naar overeenkomsten). Meestal geeft de leerling een omschrijving als: 'Net zolang schuiven totdat de zijden weer tegen elkaar zitten.' Mijn reactie: 'En nu dan?' heeft meestal een uitroep als 'Oh… ik moet gewoon doorschuiven!' tot gevolg. Voor de leerling overheersen dan niet langer de verschillen, maar de overeenkomsten.



figuur 1

Afleiden formule

Na de beeldvorming is het tijd om te schematiseren. In het boek van Lagerwerf lezen we het volgende over schematisering: ‘Schematiseren is een langdurig proces. Het oorspronkelijke beeld wordt daarbij steeds verder en steeds meer schematisch “ingevuld”. Er worden details onderscheiden en benoemd, nieuwe elementen toegevoegd en benoemd. Allerlei eigenschappen worden bewust gemaakt en geformuleerd. Er begint zich een vaktaal te ontwikkelen. Er worden nieuwe woorden ingevoerd en alledaagse woorden krijgen soms een speciale wiskundige betekenis. Formuleringen worden verkort en gesymboliseerd.’[2]

In deze opdracht (***zie figuur 3***) gaan leerlingen een formule afleiden voor de oppervlakte van een parallellogram. In feite schematiseren ze het eerder genoemde beeld. De leerlingen vervangen het woord *lengte* door het woord *zijde* en het woord *breedte* door *hoogte* (details onderscheiden en het geven van een speciale wiskundige betekenis aan woorden). Eventueel verkorten ze deze woorden tot *z* voor *zijde* en *bbh* voor de *bijbehorende hoogte*.

‘Het resultaat is een wiskundig schema dat in nieuwe probleemsituaties veel meer mogelijkheden biedt dan het aanvankelijke globale beeld.’[2] Het toepassen van een formule voor het berekenen van een oppervlakte heeft voordelen, bijvoorbeeld voor het uitrekenen van de oppervlakte van een grondvlak. De leerling kan dit met een formule ‘even’ doen, zonder dat hij bijvoorbeeld een rechthoek moet maken van een parallellogram, ook al is dit onderliggende beeld wel aanwezig.

Werkblad

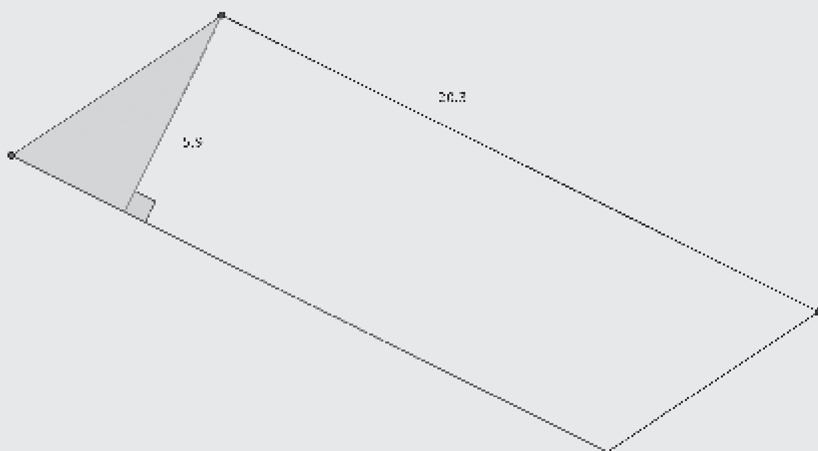
Het schematiseren is hiermee niet afgelopen. Leerlingen moeten zich bijvoorbeeld bewust worden van de eigenschappen van de hoogte: deze kan ook buiten de figuur liggen.

Ook kunnen nieuwe elementen worden toegevoegd; bijvoorbeeld: meerdere zijden met de bijbehorende hoogten. Daarnaast moeten leerlingen leren werken met het gevormde schema. ‘Die oefenfase is minder belangrijk dan vroeger omdat de leerlingen als het ware ingegroeid zijn in het algoritme.’[3]

Het geven van feedback

In deze lessenserie wordt op drie manieren feedback gegeven.

1. De leerlingen kijken de antwoorden op de inleidende opgaven zelf na. Deze antwoorden kunnen ze direct bekijken door op ‘antwoorden’ te klikken. Nu bestaat het risico dat leerlingen direct doorklikken naar de antwoorden, maar de ervaring leert dat leerlingen dit niet doen, omdat ze doordrongen zijn van het nut van deze inleidende vragen. Dat ze zich bewust zijn van de noodzaak deze vragen goed te maken, is het resultaat van het regelmatig stellen van deze oriënterende vragen.
2. Ik loop langs en geef tijdens de les direct feedback op de antwoorden. De leerlingen weten binnen enkele minuten hoe ze het gemaakt hebben. Eventueel spreek ik af dat leerlingen na het maken van opgave zoveel even langslopen met het schrift.
3. De leerlingen leveren een aantal opgaven in. Dit kan op papier of via de elektronische leeromgeving. Binnen een dag heb ik feedback gegeven, zodat de leerlingen iets hebben aan de feedback.



figuur 2

Ervaringen

Een belangrijke, maar nog onbeantwoorde vraag is de vraag naar de ervaringen van leerlingen. Hoe kijken leerlingen aan tegen dit soort opdrachten? Uit ervaring blijkt dat leerlingen in het begin even moeten wennen. Op de vraag of van de nieuwe figuur (bijvoorbeeld van de rechthoek) de oppervlakte berekend kan worden, antwoorden sommigen dat dit niet kan omdat ze geen getallen hebben. Als de buurman of buurvrouw dan zegt dat het niet de bedoeling is de oppervlakte te berekenen, maar alleen te beantwoorden of je van deze figuur de oppervlakte zou kunnen berekenen, valt het kwartje al snel. Het afleiden van de formule vinden sommige leerlingen ook lastig, omdat algebra en meetkunde voor hen twee aparte onderwerpen zijn. Bij sommigen valt nu het kwartje echt: ‘Oh… nu snap ik pas echt waarom je variabelen moet gebruiken. Je kunt dan voor bijvoorbeeld elke cirkel aangeven hoe je de oppervlakte moet berekenen en dan ben je in één keer klaar.’ Niet iedere leerling is toe aan het abstracte niveau. Dit blijkt wel uit de volgende verzameling van formules voor het berekenen van de oppervlakte van een trapezium. Deze formules zijn door leerlingen opgesteld.

1. (a + b) × h : 2
2. (A + B) • H : 2 = opp. Trapezium
3. zijde × bbh : 2
4. opp. Trapezium = ½ × (A + B) × H
5. a + b × h × 0,5 = opp. trapezium
6. zijde a + zijde b × h : 2

Bij nadere beschouwing blijken leerlingen over het algemeen goed te begrijpen wat het idee is. Het ‘: 2’ komt door het presenteren van het trapezium als de helft van het parallellogram. Ook formule 3 is een gevolg van deze representatie. Bij formule 2 en 4 moet opgemerkt worden dat we variabelen met een kleine letter schrijven. Aan de leerlingen die de formules 5 en 6 hebben gegeven, heb ik gevraagd eens uit te leggen wat ze doen. Ze geven dan aan dat ‘je zijde a en b moet optellen omdat je het trapezium er omgekeerd tegenaan plakt. Vervolgens keer de hoogte, want het is een parallellogram. Tenslotte delen door 2, want het trapezium is de helft’. Ik heb hieruit de conclusie getrokken dat de leerlingen wel begrijpen hoe je de oppervlakte moet berekenen en hoe je de formule moet afleiden. Ik heb ook geconcludeerd dat het ‘regelen van de voorrang’ door gebruik te maken van haakjes nog niet actief beheerst wordt. Door leerlingen nog eens te laten kijken en te vragen naar het bezwaar tegen deze manier van noteren, komen zij (met hulp van buurman of buurvrouw) tot het idee dat ‘× voor + moet’, maar dat ‘dat nu niet de bedoeling is’. Deze opdracht maakt dus ook duidelijk waar de haakjes voor gebruikt worden. Of zoals een leerling het zegt: ‘Ah… nu heeft het echt nut!’ Er zijn meer leerlingen die een formule geven zoals formule 6. Ik beschouw dit als een stadium tussen het stappenplan (eerst dit, dan dat) en de formele formule. Ik ben daarover niet ontevreden, omdat deze leerlingen, mijns inziens, op deze manier leren abstraheren.

Noten

[1] Martin Kindt (2006): *Oefening baart kunst*. In: Paul Drijvers (Red.): *Wat a is dat kun je niet weten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[2] Bram Lagerwerf (2000): *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Utrecht: APS; blz. 60.

[3] Ibidem; pag 46.

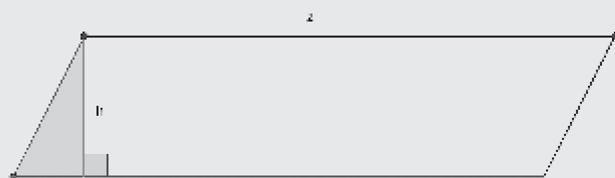
Info

De applets en werkbladen zijn via ‘deonderwijsvernieuwingscooperatie.nl’ (*http://ovc.lesbank.nl/home.php*) beschikbaar gesteld op Wikiwijs.

Over de auteur

Marc de Hoog is docent wiskunde, rekenen en informatiekunde aan de Inter-confessionele Scholengroep Westland. Daarnaast is hij auteur ICT bij *Moderne Wiskunde*. Hij volgt een studie informatica aan de Open Universiteit.

E-mailadres: *hgm@isw.info*



figuur 3

Naast Euclides een abonnement op het Nieuw Archief voor Wiskunde?

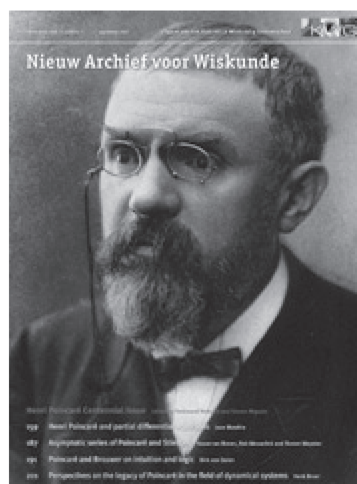
[Nellie Verhoef]

De publiciteitscommissie van het Platform Wiskunde Nederland (PWN) stelt voor om in het *Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW)* en in *Euclides*, leden op te roepen om lid te worden van 'de andere' vereniging. Er is een interessante korting en qua inhoud vullen het *NAW* en *Euclides* elkaar aan. Hierbij een korte toelichting op dit voorstel, gericht op NVvW-leden.

Eerste reactie: waarom zou je dat doen – naast *Euclides* een abonnement op het *Nieuw Archief voor Wiskunde*? Het lezen van *Euclides* schiet er vaak al bij in, en zoveel tijd is er nu ook weer niet.
Tweede reactie: hm, wat staat er dan in het *NAW* – misschien toch de moeite waard? *Euclides* gaat vooral in op lespraktijken van wiskundedocenten, hun leerlingen en het materiaal. Het *NAW* is theoretischer, meer beschouwend over de wetenschappelijke ontwikkelingen in de wiskunde en aanpalende gebieden.
Steeds vaker verschijnen er themanummers van het *NAW* die gewijd zijn aan de levensloop van markante figuren (***zie figuur 1***). Een goed voorbeeld daarvan is het laatste nummer (maart 2013) waarin de vorig jaar overleden eminente wiskundige Nicolaas Govert de Bruijn een hoofdrol speelt.
Een ander voorbeeld is de terugblik op het leven en werk van Henri Poincaré (september 2012). De bloemlezing van zijn veelzijdige werk wekt ontzag. En dat deze bijzondere wetenschapper dan nog zo bescheiden is gebleven, mag een wonder heten. In dit nummer paste ook nog aandacht voor didactiek in de bijdrage van Mark Timmer en ondergetekende over het kijken naar analytische meetkunde door een synthetische bril. Achteraf best actueel omdat dit onderwerp terugkomt in het nieuwe eindexamenprogramma wiskunde B (2015).
Het *NAW* is een Nederlandstalig tijdschrift, geschreven voor het Nederlandse wiskundige publiek, dus óók geschreven voor Nederlandse wiskundedocenten. Zo zijn er recent drie opeenvolgende artikelen verschenen van Ed de Moor, Wim Groen en Sieb Kemme over de ontwikkelingen in het meetkundeonderwijs.

Misschien weet u (of weet u niet) dat er jaarlijks (aan het eind van de zomer) vakantiecursussen worden gegeven voor wiskundedocenten. De cursussen worden verzorgd door het PWN en vinden plaats in Amsterdam en in Eindhoven (een week na elkaar). De meest in het oog lopende voordrachten worden herschreven en opgenomen in het *NAW*. De laatste is van de hand van Jeroen Spandaw: een leuk en inspirerend artikel dat over kansrijke symmetrie gaat naar aanleiding van de vakantiecursus in 2011. Jeroen begint stimulerend met de vraag naar de kans op een stomphoekige driehoek. Wie vraagt zich dat nu af? Jeroen vroeg zijn studenten een willekeurige driehoek te tekenen. Hoeveel waren er stomp? Leest u zelf maar...
Naar aanleiding van een artikel (maart 2012) over een onderzoekje van een masterstudent aan de lerarenopleiding in Utrecht verscheen een artikel over het denken van vwo-leerlingen als het gaat om het begrip *oneindig*. De student maakte gebruik van het 'hotel met oneindig veel kamers'.

Het *NAW* kent ook nog rubrieken zoals 'Nieuws' (in een mum van tijd ben je op de hoogte wat er in de Nederlandse wiskundewereld speelt en wat van belang is voor wiskundigen). En de rubriek 'De overval', waarin in het nummer van december 2010 verslag wordt gedaan van die warme dag waarop het Freudenthal Instituut werd overvallen.
Een andere rubriek is 'Het keerpunt' waarin bekende en onbekende wiskundigen





figuur 1 Twee themanummers van het NAW

vertellen over keerpunten in hun loopbaan. Natuurlijk is een bekende wiskundige zoals Rinnooy Kan (december 2010) een doelwit en ook, daaraan voorafgaand, Jan van de Craats (september 2010). Deze leuke stukjes worden geschreven door het wiskundemeisje Ionica Smeets.
En dan de wat grotere rubriek 'Het interview'. Onder die rubriek verscheen het mooie artikel van Gerard Alberts en Rainer Kaenders (september 2005) over de wiskundig-didactische ideeën van Pierre van Hiele (1909-2010). Pierre van Hiele is ook vandaag de dag nog actueel. Een tweede artikel verscheen naar aanleiding van zijn sterven op 101-jarige leeftijd (juni 2012). Ook aan de groten onder de universitaire docenten wordt aandacht besteed. Wie heeft er geen beeld bij het Van der Blij-effect (juni 2004)?

Kortom: het *NAW* vult *Euclides* prachtig aan. Het lidmaatschap van twee verenigingen (met korting) biedt een totaaloverzicht – zegt het voort!

Info
Website Wiskundig Genootschap: *www.wiskgenoot.nl*
Website *NAW*: *www.nieuwarchief.nl*

Lid worden? Ga naar: *www.wiskgenoot.nl/wordlid/index.html*

Over de auteur
Nellie Verhoef is als vakdidacticus en onderzoeker verbonden aan de Universiteit Twente (Instituut ELAN). Zij is lid van de NVvW én onderwijsredacteur van het *NAW*.
E-mailadres: *n.c.verhoef@utwente.nl*

Uitdagende problemen

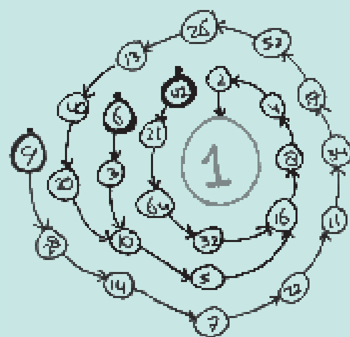
WISKUNDE IN LITERATUUR, SPEELFILMS EN MUSEA

[Jacques Jansen]

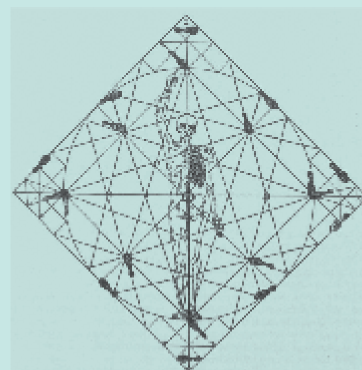
Iets voor in de zomervakantie?
Of het nu regent of niet, het is altijd leuk om een goed boek te lezen, een spannende film te zien of een interessante tentoonstelling te bezoeken. Er zijn nogal wat films en boeken waar een wiskundige de hoofdfiguur is of waarin op de een of andere manier wiskunde aan de orde komt. Na de zomervakantie is hopelijk uw accu opgeladen en wie weet vindt u de inspiratie om uw leerlingen een wiskundetentoonstelling te laten organiseren, een kort filmpje te laten maken of aan een geschikt boek een hoofdstuk toe te laten voegen. Ideeën hiervoor vindt u in dit artikel. En niet alleen voor uw C-leerlingen!

Speelfilms
'De wiskunde zoals die je tot nu toe hebt gekend, wilde tot absolute en definitieve antwoorden komen, uitgaande van absolute en definitieve vraagstellingen. Nu stapt u een heel ander avontuur in dat van de onoplosbare vraagstellingen. Uw omgeving zal volhouden dat dit een zinloze bezigheid is. U zult het met geen enkel argument kunnen weerleggen.'
'Welkom in de zuivere wiskunde, in het land van de eenzaamheid.' Ik stel u mijn assistente voor, mejuffrouw Jeanne Marwan.' Aan het woord is wiskundeprofessor Niv die zijn studenten toespreekt. 'Hallo', vervolgt Jeanne. 'We beginnen met het vermoeden van Collatz.' Zie [1] en ***ook figuur 1*** (op pag. 342).
Meteen daarna volgt een dialoog tussen de hoogleraar en de jonge wiskundige Jeanne. 'Wat zeg je intuïtie? Je intuïtie is goed. Daarom kun je een wiskundige worden.'
De moeder van Jeanne (actrice Lubna Azabal) is net in Montreal overleden. Bij de notaris heeft Jeanne, samen met haar tweelingbroer Simon, te horen gekregen dat hun vader toch nog leeft en dat ze nog een oudere broer hebben. Niv raadt haar aan om een zoektocht te beginnen in het Midden-Oosten naar haar verloren gewaande familieleden. 'Je moet 't weten, anders zal je geest nooit rust hebben. En als je geest geen rust heeft, is er geen zuivere wiskunde', volgens de hoogleraar.
Dit zijn citaten uit openingsscènes van de spannende thriller 'Incendies', uitgebracht in 2010, met als thema's lotsbestemming en de wijze waarop je afkomst voor een groot deel bepaalt wie je zelf bent. Mij verraste in deze film het gebruik van wiskundige metaforen en codes om het verloop van de film te duiden. Ook komt de beroemde formule van de Moivre (Euler) ter sprake: $e^{\pi \cdot i} = -1$. Op het eind van de film kun je er achter komen waarom $1 + 1 = 1$.
Codes? Bijna iedereen kent natuurlijk het boek 'De Da Vinci Code' van Dan Brown, verfilmd in 2006. Professor Robert Langdon haalde de foto van het misdrijf uit zijn zak en legde die op de salontafel. Sophie Neveu, politie-cryptologe en kleindochter van de vermoorde Louvre-conservator Jacques Saunière, hoefde alleen de eerste regel te lezen om te weten dat Langdon gelijk had:
13-3-2-21-1-1-8-5
O, Draconian devil!
Oh, lame saint!
Er zijn heel wat Nederlanders – vrees ik – die denken dat auteur Dan Brown de Fibonacci-getallen heeft uitgevonden. Er is zelfs een werkboekje, 'De geheimen van de Da Vinci Code', om ons te helpen de vele symbolen, mythes en mysteries te ontrafelen. Maar wat dacht u dan van de mystieke cirkel van Thibault? Een onderdeel van de schermsport dat schrijfster en columnist Marente de Moor (ja, de dochter van...) als kapstok gebruikt voor haar boek 'De Nederlandse Maagd'. Nog niet verfilmd. De plannen zijn er wel.
De cirkel (***zie figuur 2***) wordt in het verhaal verschillende keren als metafoor gebruikt. Binnen de cirkel is het lichaam van een man uitgetekend, een helft tot op het bot ontleed. Verder zijn vele voetafdrukken te zien. Kunt u dit geometrisch lijnenspel ontrafelen?

Meer wiskundigen als hoofdfiguren. Natuurlijk kent u 'Beautiful Mind' uit 2002 waarin de briljante wiskundige John Nash (acteur Russell Crowe), net wanneer hij op het punt staat internationaal erkend te worden, betrokken raakt bij een mysterieuze samenzwering. Misschien iets minder bekend is 'Good Will Hunting' uit 1997 van de Amerikaanse filmregisseur Gus van Sant. Will (acteur Robin Williams) en zijn beste vriend Chuckie hangen rond in de armere wijken van Boston, waar ze drinken en af en toe eens vechten. Will doet lichamelijk werk en verbergt zijn enorme intellect. Hij heeft een talent voor het onthouden van feiten, en een intuïtie voor het oplossen van complexe wiskundige problemen. Er moet een hele goede psycholoog, Sean McGuire, worden ingeschakeld om Will echt te begrijpen en om hem te laten inzien hoe hij zijn talenten ook anders kan gebruiken.
Het land van eenzaamheid is al genoemd maar nog niet de eenzaamheid van de priemgetallen. Eerst verscheen het boek 'De eenzaamheid van de priemgetallen' van de jonge Italiaanse auteur Paolo Giordano in 2008. Later werd dit boek verfilmd door Saverio Costanzo. Ook in dit verhaal is er een hoofdrol weggelegd voor een wiskundige. Dit keer gaat het om de hyperintelligente Mattia. Op pagina 138 in het boek staat de prachtige zin: 'Mattia dacht dat Alice en hij zo waren, twee tweelingpriemgetallen, alleen en verloren, vlak bij elkaar, maar niet dicht genoeg om elkaar echt te raken.' Lees, kijk en geniet!
'Pi' is een Amerikaanse psychologische thriller uit 1998 van regisseur Darren Aronofsky. Het verhaal gaat over de jonge wiskundige Max Cohen (gespeeld door Sean Gullette), die na een zonnesteek een dwangmatige obsessie heeft voor patronen in numerieke reeksen. Nadat hij ontdekt dat het universum en alles daarin uit spiralen is opgebouwd, krijgen meer mensen belangstelling voor zijn denkbeelden. Geleid door zijn neurose en waanbeelden vindt hij een getal van 516 cijfers dat de sleutel vormt tot de structuur van maar liefst drie dingen tegelijk: het beurswezen, het getal π en de thora, de heilige tekst van het joodse geloof. [3]
'Numb3rs' is een Amerikaanse televisieserie die het eerst werd uitgezonden in 2005 op CBS. De dramaserie is ontworpen door Nicolas Falacci en Cheryl Heuton en wordt geproduceerd door de broers Ridley en Tony Scott.



figuur 1 Neem een willekeurig natuurlijk getal n.
(*) Als n even is, deel n door 2.
Als n oneven is, vermenigvuldig n met 3 en tel er 1 bij op.
En herhaal vanaf (*).



figuur 2 Mystieke cirkel van Thibault

Wat kunnen uw leerlingen met film doen?

Ik vroeg het aan een leerling die filmen als hobby heeft. Zijn antwoord: 'Maak een film van ongeveer vijf minuten waarin een docent kort en bondig uitlegt aan een leerling wat bijvoorbeeld een logaritme is.' Ander idee: er zijn wiskundewandelingen beschreven o.a. in Amsterdam en Nijmegen. Misschien ook leuk om die te verfilmen.[4]

Literatuur

De plenaire middaglezing op de wiskunde C-dag op 20 maart j.l. werd verzorgd door de filosoof Philibert Schogt die terugkeek op het ontstaan van zijn boek 'De wilde getallen'. Eerst wilde hij een echt bestaand wiskundeprobleem aankaarten (het vermoeden van Fermat) maar door toedoen van een goede vriend zag hij hiervan af en verzon een probleem. In de roman 'De wilde getallen' (De Arbeiderspers, 1998) vindt de hoofdpersoon Isaac Swift een oplossing voor het eeuwenoude 'wildengetallenprobleem'. Maar wat zijn wilde getallen precies? Bestaan ze überhaupt?
Auteur Philibert Schogt legt uit wat hem ertoe bracht een roman over deze bijzondere getallen te schrijven, en hoe er vervolgens op werd gereageerd door lezers in het algemeen, door de literaire kritiek, en tenslotte door de wiskundige gemeenschap.

Verschillende verfilmde romans zijn al gepasseerd waarbij de hoofdfiguur een wiskundige of een docent wiskunde is. Niet verfilmd, maar een absolute aanrader en vakantievuller is de trilogie '1q84' van de Japanse auteur Haruki Murakami, samen bijna 1300 bladzijden. Er zijn twee hoofdfiguren. Tengo is wiskundeleraar en de ghostwriter van een bestsellerauteur. Aomame is sportschoolinstructrice die in opdracht moorden pleegt.
De karaktereigenschappen van deze wiskundeleraar komen uitvoerig aan de orde. Misschien herkent u zich erin.
De Fields Medal, een soort Nobelprijs voor de wiskunde, komen we tegen in het boek 'Over de liefde' van schrijfster Doeschka Meijsing, maar ook in de debuutroman 'Bonita Avenue' van de Nederlandse auteur Peter Buwalda. Hoofdfiguur in dit laatste boek is Siem Sigerius, briljant wiskundige en rector van Tubantia University, die ook een Fields Medal ontving. Echter, de wiskundige ontdekt dat zijn stiefdochter Joni en haar vriendje een handeltje drijven dat het daglicht niet kan verdragen. Dan is er ook nog iets met zijn echte zoon aan de hand. Een klassiek familiedrama, een thriller.
In 'Godverdomse dagen op een godverdomse bol' van de Vlaamse auteur Dimitri Verhulst wordt de geschiedenis van de mensheid op een cynische wijze gepresenteerd. Hoewel het droevig met de mens is gesteld, prijst hij de ontdekking van de gelijkzijdige driehoek en schrijft een prachtig relaas over de juwelen van de wiskunde, 'de Platonische Lichamen'.
'Het meten van de wereld' van de Duitse schrijver Daniel Kehlman is een filosofische avonturenroman over het leven van twee genieën. Het is een geraffineerd spel met feit en fictie, en veel humor. In het boek pakken twee mannen, tegen het einde van de achttiende eeuw, onafhankelijk van elkaar, het absurde plan op om de wereld op te meten. De ene, Alexander von Humboldt, baant zich een weg door jungle en woestijn, vaart over de Orinoco, test gif uit op zichzelf, kruipt in de diepste spelonken, beklimt vulkanen en ontmoet kannibalen. De andere, de wiskundige en astronoom Carl Friedrich Gauss, die niet zonder vrouwen kan leven, maar zelfs in zijn huwelijksnacht uit bed springt om een formule te noteren, verkrijgt dezelfde meetresultaten, al verlaat hij zelden zijn geboorteplaats. Hoofdstuk Gauss wisselt steeds met hoofdstuk Humboldt. Maar dan? Oud, beroemd en ook een beetje zonderling geworden, ontmoeten ze elkaar in 1828 op een conferentie in Berlijn. Gauss is nog amper uit zijn koets gestegen of het bekvechten neemt een aanvang.
Ook een aanrader is 'De koepel van Brunellischi' van Ross King. Een verhaal van de getalenteerde goudsmid Filippo Brunelleschi, de ontwerper en bouwer van de koepel van de Santa Maria del Fiore, de kathedraal in Florence.
Tot slot wil ik noemen 'De huishoudster en de professor' van Yogo Ogawa en 'De telduivel' van Hans Magnus Enzenberger. In beide boeken, roman en jeugdboek, komt veel concrete wiskunde voor.
Bijvoorbeeld bij de roman: de briljante wiskundeprofessor legt uit aan de tienjarige zoon van zijn huishoudster wat een Ruth-Aaron-paar is. Het product van 714 en 715 is gelijk aan het product van de eerste zeven priemgetallen en de som van de factoren van 714 is gelijk aan de som van de factoren van 715:


figuur 3a Alles is getal


figuur 3b Alles is getal


figuur 4 Veel lees- en filmplezier!

$714 \times 715 = 510510 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$
$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$
$715 = 5 \times 11 \times 13$
$2 + 3 + 7 + 17 = 5 + 11 + 13$
Idee voor C-leerlingen: Schrijf bij één van de boeken een extra hoofdstuk. Bij 'De telduivel' hebben sommige scholen dat al eens gedaan. Of ontwerp een stripverhaal. Zie bijvoorbeeld 'Leonhard Euler' (Een man die kan tellen).[5]

Musea, tentoonstellingen
In de NRC LUX-reizen van 6 april j.l. lezen we over MoMath in New York, het enige museum in de Verenigde Staten dat helemaal aan wiskunde is gewijd. Het begint al met de deurknoppen op de hoge glazen toegangsdeuren die samen het getal π vormen. Nederland daarentegen heeft helemaal geen wiskundemuseum. Om het dichtstbijzijnde te vinden moeten we de Duitse grens over. Naar Bonn of naar de universiteitsstad Giessen, gelegen boven Frankfurt. Hier vinden we het Mathematicum. Wij moeten het doen met een tentoonstelling van Maurits Escher of met een deeltentoonstelling in het Museum Boerhaave in Leiden.

Wat kunnen uw leerlingen doen?
Waarom organiseren we niet zelf met onze leerlingen een tentoonstelling. Bijvoorbeeld over getallen. Een naam is zo bedacht: 'Alles is getal'. Het getal π is al genoemd en krijgt elk jaar al wat aandacht op 14 maart. Maar er zijn meer interessante getallen die de aandacht verdienen. Het getal e van Euler. Al was het maar voor de lage rente. De gulden-snede-getallen φ en $1/\varphi$. Het plastisch getal ψ van de Nederlandse architect Dom Hans van der Laan.
Elke klas op uw school adopteert een getal en gaat dat getal op originele wijze uitbeelden. De onderbouw gaat voor de getallen 0 tot en met 9 en beeldt bijvoorbeeld de geschiedenis van het getal 0 uit. Of ze beelden hele grote of juist hele kleine getallen uit. Wortelgetallen, gehele getallen, driehoeksgetallen, … De school wordt versierd met kerfstokken, laat zien hoe de Maya's rekenden of de Chinezen of … De bovenbouw pakt de al genoemde gulden-snede-getallen aan, het plastisch getal, priemgetallen, volmaakte getallen, bevriende getallen, enzovoort. De tentoonstelling wordt door leerlingen gecoördineerd vanuit hun profielwerkstuk-opdracht. U kunt ICT inzetten of aan de slag met een geometrische balletvoorstelling. Na de zomer kaart u het idee aan bij uw collega's (ook het management nog even enthousiast maken) en de leerlingen, en op de open dag of op een ander moment in de lente van 2014 heeft u een prachtige getallententoonstelling.
En niet vergeten voor de ideeën: het 'bronnenboek', de special 'Getallen' van *Euclides* (2012), en natuurlijk 'De telduivel' van Hans Magnus Enzenberger.

Noten
[1] Het vermoeden van Collatz, het ($3n + 1$)-vermoeden, wordt besproken in de Vakantiecursus 2013 'Wiskunde in Wording' (op 23 en 24 augustus a.s. in Eindhoven en op 30 en 31 augustus a.s. in Amsterdam). Zie: *www.platformwiskunde.nl/onderwijs_vakantiecursus_wiskunde.htm*
[2] Voor het vermoeden van Poincaré is een speciale dag gereserveerd tijdens de Vakantiecursus 2013.
[3] Ook beschreven in *Pythagoras* nr. 5, juni 1999, 38e jaargang.
[4] Zie de Wisc-wandelingen van Hans Wisbrun op: *http://hanswisbrun.nl/frivoler/wiskundewandelingen/*
[5] Tekst van Andreas K. Heyne en Alice K. Heyne. Een uitgave van Epsilon (Utrecht).

Over de auteur
Jacques Jansen was 35 jaar docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

Succesvol meedoen aan de Wiskunde Olympiade



[Quintijn Puite]

De Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wedstrijd voor havo/vwo-scholieren. Zo'n 300 scholen bieden hun leerlingen de gelegenheid om hier aan mee te doen. En steeds meer leerlingen gaan de uitdaging aan: deden in 2010 nog 4150 leerlingen mee, in 2013 waren dat er al 7422. Hoe komt het dat steeds meer leerlingen lol beleven aan deze wedstrijd?

Hele volksstammen maken dagelijks de sudoku in de krant. Je bent een tijd lang aan het puzzelen, en als je maar lang genoeg doorzet, word je beloond voor het vinden van de oplossing. Voor de deelnemers aan de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade is de ervaring eigenlijk niet anders: je vastbijten in een niet-alledaagse opgave, en daarna een flinke dosis voldoening als je eruit komt.

Zijn die olympiade-opgaven dan wel op te lossen? Zeker! Maar liefst 99% van de 7422 deelnemers heeft in januari 2013 ten minste één probleem gekraakt. En gemiddeld scoorden de deelnemers 13 van de 36 punten, waar dat in 2010 nog minder dan 8 was (***zie figuur 1***).
Het helpt daarbij dat de eerste ronde ook multiple-choice-vragen bevat en tegenwoordig met opzet ook een aantal echt goed toegankelijke opgaven. Daarbij wordt er rekening mee gehouden dat leerlingen uit alle klassen havo/vwo met de opgaven aan de slag kunnen. We bevelen de eerste ronde vooral aan voor leerlingen uit de derde, vierde en vijfde klas, maar talenten uit de eerste en de tweede klas moet u vooral ook een kans geven. Gemiddeld deden er in 2013 per school 26 leerlingen mee; de aantallen liepen per school uiteen van 1 tot 231. De deelnemers waren in januari als in tabel 1 verdeeld over de verschillende klassen (***zie ook figuur 2***).

klas 1	klas 2	klas 3	havo 4	vwo 4	havo 5	vwo 5
399	413	1033	407	2374	141	2655

tabel 1 Aantal deelnemers aan de eerste ronde per klas

Scholenprijs 2013
Het Stedelijk Gymnasium Nijmegen is de winnaar van de scholenprijs 2013 van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Op donderdagmiddag 18 april 2013 vond de uitreiking van deze scholenprijs plaats. Wedstrijdleider Eddy Stortelder kreeg toen uit handen van voorzitter prof. Frits Beukers de felbegeerde wisselbokaal overhandigd. En dat was niet voor de eerste keer: de school won de prijs ook al in 2006, 2008 en 2009.



foto 1 Staand v.l.n.r.: Melanie Steentjes, Quintijn Puite, Tijmen van der Kemp (34 p), Jeroen Winkel (36 p), Tim Vriens (36 p), Matthijs Vernooij (29 p), Frits Beukers. Hurkend v.l.n.r.: Joep Veldhoven (29 p), Auke Rosier (36 p), Sjoerd Nooteboom (29 p).

De scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de beste *vijf* leerlingen bij de eerste ronde. Het maximale aantal te behalen punten is 180; het Stedelijk Gymnasium Nijmegen behaalde er maar liefst 171.

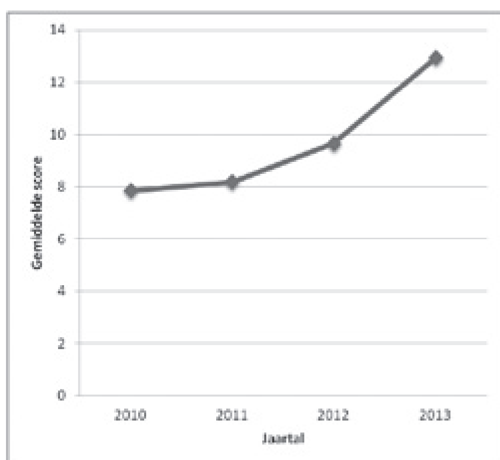
Gemiddeld gaat circa 1 op de 10 eerste-ronde-deelnemers door naar de volgende ronde op een universiteit in de regio, waar de 800 beste leerlingen uit de verschillende categorieën het tegen elkaar opnemen. Van maar liefst 82% van de deelnemende scholen gingen er in maart leerlingen door naar de tweede ronde!

Neem nu het Bisschoppelijk College Broekhin in Roermond. Daar gingen in januari 30 enthousiaste leerlingen aan de slag met de eerste ronde: 9 derdeklassers, 7 uit 4-vwo, 3 uit 4-havo en 11 uit 5-vwo. Dat leverde mooie resultaten op en 5 leerlingen mochten door naar de tweede ronde (3 uit de derde, 1 uit 4-vwo en 1 uit 5-vwo). Vervolgens wist één van de derdeklassers zelfs een plek in de finale te bemachtigen.

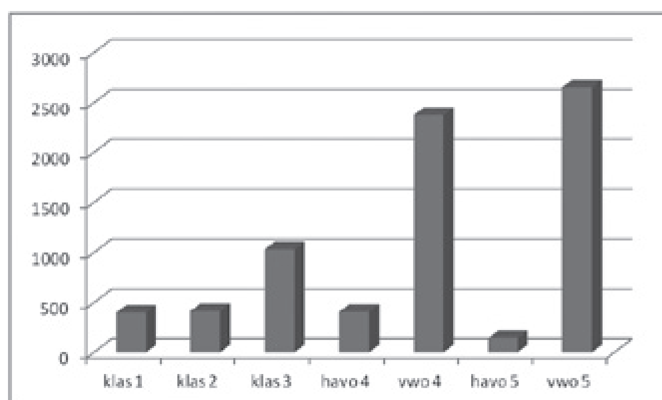
Ook bij de tweede ronde is succes bijna verzekerd. Maar liefst 96% van de leerlingen slaagde er in 2013 in om minstens één van de B-opgaven (open vragen waarbij een getal als antwoord gegeven moet worden) te kraken. De cesuren voor doorgang naar de finale worden zodanig vastgesteld dat alle categorieën goed vertegenwoordigd zijn; ***zie tabel 2 en figuur 3*** (overigens zitten na de zomer de meeste leerlingen natuurlijk een klas hoger).

klas 1	klas 2	klas 3	havo 4	vwo 4	havo 5	vwo 5
4	8	35	1	57	0	44

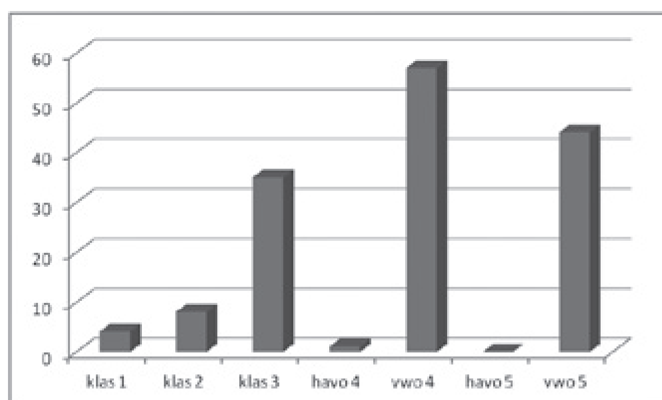
tabel 2 Aantal deelnemers aan de finale per klas



figuur 1



figuur 2 Aantal deelnemers aan de eerste ronde per klas



figuur 3 Aantal deelnemers aan de finale per klas

Info
In oktober ontvangt elke school informatie over de eerste ronde in **januari 2014**. Deze vindt plaats **tussen 20 en 30 januari** op een door de school zelf te kiezen tijdstip. We hopen van harte dat u (weer) meedoet!

Zie voor meer informatie *www.wiskundeolympiade.nl* .

Over de auteur
Quintijn Puite is – samen met Birgit van Dalen en Melanie Steentjes – verantwoordelijk voor de dagelijkse gang van zaken bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Hij is hiervoor twee dagen in de week verbonden aan de Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is hij docent bij de Vakgroep Wiskunde van Instituut Archimedes, de lerarenopleiding van de Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: *quintijn@wiskundeolympiade.nl*

Rekenen met variabelen

[Frans Ballering en Nafees Rehman]

Motto bij variabelen: getallen, getallen en altijd nog maar meer getallen!

Nafees Rehman, oud-student aan de tweedegraads lerarenopleiding schrijft: ‘Het hoofdstuk over variabelen [1] is er een waaraan de leerlingen een hekel hebben. Het boek begint met voor leerlingen moeilijke woorden en begrippen, zoals “soortgelijke termen”.’
Ik vertel ze die woorden later wel. Eerst maar eens nadenken over: ‘Waarom is $2a + 3a = 5a$?’ en ‘Waarom is $2a + 3b$ niet gelijk aan $5ab$?’
Vroeger begon ik mijn uitleg door te vertellen wat $2a$ en $3a$ betekenen, namelijk $a + a$ en $a + a + a$. Dat is dus samen $a + a + a + a + a = 5a$.
Wat betekenen $2a$ en $3b$? Dat is $a + a$ en $b + b + b$. Dat is dus niet hetzelfde als $5ab$, want $5ab$ betekent $ab + ab + ab + ab + ab$.

Didactische bezwaren tegen deze aanpak

Het rekenen met variabelen begint in de schoolboeken met het maken van formules. Om aan te sluiten bij het (vroegere) leerproces van de leerlingen zou daarop teruggekomen moeten worden. Variabelen verschijnen eerst als woorden, zoals *bedrag* en *aantal* en worden vervolgens afgekort tot letters.
Om te kunnen begrijpen dat $2a + 3a$ gelijk is aan $5a$ en niet aan $5ab$, móet je wel terug van abstract naar concreet, en dus naar getallen.

De aanpak van Nafees

In mijn de tuin staat een plantje. Dat groeit elke week 2 cm. Wat is de lengte van dat plantje na drie weken? En na acht weken? Kunnen wij een formule bedenken bij de groei van dit plantje? Ik schrijf de formule op het bord:
lengte in cm = 2 × *aantal weken*
De leerlingen hebben vorig jaar geleerd dat ze een formule korter kunnen opschrijven. Wat moet je dan doen? De leerlingen zullen meteen roepen: ‘Lengte plantje is twee keer w.’ Dit kan ook nog korter, toch? Ja klopt, namelijk:
lengte in cm = $2w$
Nu gaan wij met de formule de lengte van het plantje uitrekenen als het 3 weken oud is.
Dat is:
lengte in cm = $2w$
lengte in cm = 2 × 3 = 6
De lengte van het plantje na 8 weken is dan:
lengte in cm = $2w$
lengte in cm = 2 × 8 = 16
Na drie weken is het plantje 6 cm en na acht weken is de lengte 16 cm. Dus het plantje groeit in vijf weken maar liefst 10 cm. Hierbij kan een som gemaakt worden:
3 × 2 + 5 × 2 = 8 × 2
We zien dus steeds dezelfde soort berekeningen [2], zoals:
3 × 7 + 5 × 7 = 8 × 7
3 × 25 + 5 × 25 = 8 × 25
3 × 0,4 + 5 × 0,4 = 8 × 0,4
$3 \times \frac{5}{7} + 5 \times \frac{5}{7} = 8 \times \frac{5}{7}$
3 × 123 + 5 × 123 = 8 × 123
Ik hoop nu dat de leerlingen op het idee komen om een variabele te gebruiken als ik stuur met:
3 × … + 5 × … = 8 × …
Eventueel stel ik vragen als: Op de puntjes kan ik toch elk getal invullen? Heb je zoiets eerder gezien? Weet je nog hoe we dat in formules deden?
Dus: $3a + 5a = 8a$

De leerling aan het (denk)werk

Ik laat nu de leerlingen enkele voorbeelden verzinnen én deze verklaren met getallen. Dan besteed ik meteen aandacht aan het omgekeerde. Dat voorkomt dat er al te veel nadruk komt op korter schrijven. Immers we gebruiken ook vaak een langere schrijfwijze als ons dat uitkomt.
Wat denk je: is $8a = 6a + 2a$ ook goed?
Verzin zelf eens andere voorbeelden.

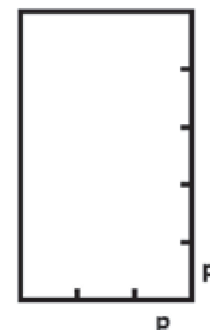
Bedenkt ook iemand dat $8a = 2\frac{1}{2}a + 5\frac{1}{2}a$?[2] Zo nee, dan geef ik er zelf zo een. De leerlingen kunnen nu weer verder met verzinnen. Twee kanten op dus.
Daarna wordt het tijd voor $5ab - 3ab$, $4x^2 + 93x^2$, die ik ook inbreng als leerlingen daar niet mee komen.
Dit kan toch niet zonder getallen?
Ik wil de leerlingen met elkaar laten overleggen over de volgende vragen.
Is het mogelijk om $3a + 5b$ te herleiden? Wat zou daar dan uitkomen? Kunnen we laten zien dat dat klopt?
Tijdens de nabespreking zie ik in elk geval of leerlingen getallen gaan invullen en of ze verklaringen kunnen bedenken en onder woorden brengen.

Opnieuw denkwerk

Dan is het tijd om opgaven te verzinnen die wel herleid kunnen worden én opgaven waarbij dat niet kan. Die kunnen wel in twee rijtjes worden gezet. Zo krijgen de leerlingen vat op het begrip ‘gelijksoortige termen’ nog voordat het woord is gevallen.
Ik laat ze onder woorden brengen wanneer er wel en wanneer niet kan worden herleid.
Het begrip ‘gelijksoortige termen’ is daarna niet meer zo moeilijk, hoewel ik het zeker aan het woord ‘term’ opnieuw aandacht zal moeten besteden.
Ik kan eerst vragen wat dat woord betekent. Waarschijnlijk levert dat niet veel op. Maar ik stel die vraag toch, omdat ik daarmee laat zien dat ik dat een goede vraag vind. Kan er iemand een voorbeeld geven? Ook op die vraag verwacht ik geen antwoord. Maar opnieuw wil ik ze leren dat het geven van voorbeelden vaak helpt.
Als ik opschrijf: $2a + 7 + 28$ helpt dat?
En bij $2a \times 58 + 3b + 25$?
Het woord product zal dus ook wel gebruikt worden.

Beeldvorming: begin van abstractie

Er is nu een beeld gevormd bij de leerlingen. Als de leerlingen variabelen zien staan, dan denken ze aan vervangers voor getallen. Ze kunnen nu uitleggen waarom je een bepaalde som wel of niet kan herleiden.



figuur 1

Dan gaan we nog een stap verder. Hoe kunnen we $3p \times 5p$ anders schrijven (herleiden)? Ik laat het in een rechthoek zien; ***zie figuur 1***. Wat is de lengte en de breedte? Wat is de oppervlakte van één vierkantje? Wat is de oppervlakte van de hele rechthoek? Maak zelf eens een aantal sommen en teken er een rechthoek bij.
Trucjes aanleren, ik heb me er vaak toe laten verleiden. Dan lukken de opgaven wel. Ik krijg dan het gevoel dat de leerlingen het zo wel begrijpen. Maar als je ze vraagt waarom dan iets zo is, dan krijg je als antwoord: 'Dat is de regel' of 'Dat is gewoon zo'.
Tot zover de aanpak en ervaringen van Nafees.

Terugkijken

Ik gebruik nooit het woord *letter*(*s*), maar altijd *variabele*(*n*). Dat verwijst al een beetje naar getallen. Ik kom dan weer terug op hun leerproces uit de eerste klas: eerst gebruiken we woorden voor variabelen en als we eenmaal gewend zijn aan het begrip, gaan we letters gebruiken. Op die manier komt er voor de leerlingen ook een verband tussen formules en het rekenen met variabelen en dat is nóg een voordeel. Je kunt daarmee ook motiveren waarom leerlingen dit moeten leren. In de toekomst moeten formules soms ook met elkaar vermenigvuldigd worden (in de natuurkunde bijvoorbeeld: druk en temperatuur). Daarmee maak ik hier een begin.
Bij de activiteit van zelf sommen bedenken kan ik ook meer ingewikkelde voorbeelden (laten) noemen zoals $3a^2$, $5a^4$ en $25a^2$, $3bc$, enzovoort. Bij dit soort voorbeelden hebben de leerlingen veel last van het (eventueel) denken aan zakken of wagons!
Een laatste detail: de betekenis van $2a$ is niet noodzakelijk $a + a$, want op een ander moment geven we daarvoor $2 \times a$ als betekenis.
'Dan leg ik uit wat het eigenlijk betekent.' Ik heb dat vaak horen zeggen, ook door leraren met jaren ervaring.
Ik realiseerde mij op een gegeven moment dat we voor die betekenis soms dát kiezen wat ons het beste uitkomt.

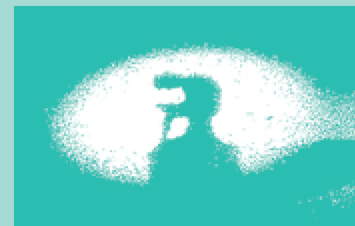
Noten

[1] *Getal & Ruimte*, versie 2009, deel 1 havo/vwo
[2] We moeten hier een grote variatie aan voorbeelden geven. Het is belangrijk dat leerlingen bij getallenvoorbeelden niet alleen denken aan 3 en 5.

Over de auteurs

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Hij is nog niet uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, mede door zoveel enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om 's avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*
Nafees Rehman is wiskundeleraar aan het Edith Steincollege in Den Haag en inmiddels afgestudeerd aan de tweedegraads lerarenopleiding van de Hogeschool Rotterdam.
E-mailadres is: *n.rehman@esloo.nl*

Getuigen
ROLDUC WISKUNDEDICTATEN



[Danny Beckers]

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd het Nederlandse onderwijsstelsel grondig herzien. In 1857 kwam er een herziening op de wet op het lager onderwijs. In 1863 volgde een nieuwe wet op het middelbaar onderwijs en in 1876, tenslotte, werd een nieuwe wet op het hoger onderwijs van kracht. De wetgeving betekende dat er van staatswege veel geld naar onderwijs ging. Daar stond tegenover dat de scholen overheidsinmenging toelieten: er waren eisen aan het curriculum, de opleiding van docenten en de examinering.

Een aantal scholen bleef buiten de nieuwe wettelijke kaders opereren. Soms omdat ze niet konden voldoen aan de eisen die de wet stelde; soms echter ook omdat ze bewust afstand hielden en geen enkele vorm van overheidsinmenging wilden tolereren. Rolduc was zo'n instituut. Rolduc was een kleinseminarie van het bisdom Luik. Als klooster bestond Rolduc al sinds de Middeleeuwen; als seminarie was het relatief nieuw. Met de afscheiding van België, en daarmee de splitsing van Belgisch en Nederlands Limburg, kwam het seminarie in een vervelende positie. De toenmalige directeur, Henri Peters (1806-1855), begreep goed dat zijn school het benauwd zou krijgen wanneer ze uitsluitend priesters voor de Nederlandse katholieke gemeenschap mocht opleiden. Hij nam een vlucht naar voren door te verkondigen dat zijn school een 'katholiek instituut voor geheel Nederland en aangrenzende landen' was. Toen in 1843 het bisschoppelijk seminarie definitief verhuisde naar St.-Truiden, ontwikkelde Rolduc zich zodoende tot een instelling voor secundair onderwijs van katholieke signatuur. Tot kort na de Tweede Wereldoorlog was Rolduc een internaat voor jongens uit de betere rooms-katholieke kringen, ook voor hen die het priesterschap niet ambieerden.

Een van de eerste wiskundedocenten die aan de deze nieuwe instelling doceerde, was H. van Buren. Hij werd aan het eind van de jaren vijftig of het begin van de jaren zestig van de negentiende eeuw aangesteld. Tussen 1860 en 1866 schreef hij een aantal handleidingen voor het algebra- en meetkundeonderwijs. Die handleidingen werden ten behoeve van zijn leerlingen gehectografeerd en in de vorm van schriftjes beschikbaar gesteld. Een paar exemplaren van deze schriftjes zijn bewaard gebleven en bevinden zich deels in een privé-collectie, deels in de universiteitsbibliotheek van Nijmegen. Ze dragen de sporen van intensief gebruik door katholieke kostschooljongens én getuigen van enige ervaring in het onderwijs.

De serie schriftjes bestaat uit een inleiding algebra, meetkunde en goniometrie. De algebraschriftjes van Van Buren begonnen met een *Beginselen de Stelkunst* uit 1862. Het was deels eigen werk, deels gebaseerd op de algebralesboeken van S.F. Lacroix (1765-1843), die in herziene edities – het boek stamde tenslotte al uit 1800 – veel gebruikt werden in België en Frankrijk.

Van Buren introduceerde zijn leerlingen uitvoerig in het rekenen met letters, leerde hen daarna lineaire vergelijkingen oplossen; dan volgden de machtsverheffing en tweede- en derdemachts worteltrekking uit getallen en algebraïsche vormen. Daarna kwamen stelsels lineaire vergelijkingen aan bod en dan vierkantsvergelijkingen. Eerst van het eenvoudige type: $7x^2 = 105903$; dan een paar voorbeelden die door handige herleidingen tot een dergelijke type konden worden omgewerkt:

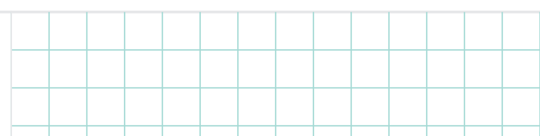
$$11-\frac{x+25}{x^2}=3-\frac{x-25}{x^2} \quad \text{en}$$

$$\sqrt{\frac{5}{x^2}+49}-\sqrt{\frac{5}{x^2}-49}=7$$

Vervolgens leerde Van Buren zijn leerlingen kwadraat afsplitsen en gaf hij een afleiding voor de *pq*-formule: de oplossingen van de vergelijking $x^2 + px = q$. Leek dit nog tamelijk veel op wat er in andere Nederlandse lesboeken gebeurde, op dit punt onderscheidde Van Buren vier gevallen met p en q respectievelijk positief of negatief en werkte hij elk geval afzonderlijk uit, om tot de conclusie te komen dat het in alle vier de gevallen echt dezelfde formule



figuur 1 Abdij Rolduc, Kerkrade



opleverde. In de meeste Nederlandse lesboeken deed men dat rekenwerk in één keer af.

Twee vraagstukken uit de 'Beginselen der Stelkunst' (1862)

In vier beurzen telt men in het geheel 90 gulden. Zoo men in de eerste beurs nog 5 gulden legt, uit de tweede vier gulden wegneemt, de som van de derde verdrievoudigt, en eindelijk uit de vierde de helft wegneemt, zal in elk beurs evenveel tellen. Hoeveel is de wezenlijke inhoud van elke beurs?

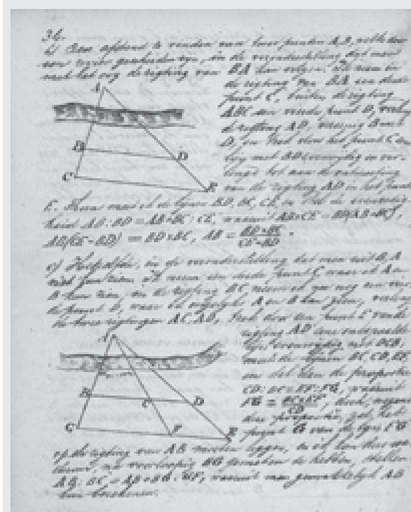
Köln, Aachen en Düsseldorf vormen door hunne ligging eenen regthoekigen driehoek, zoodanig dat Köln aan het hoekpunt van den regten hoek ligt. De afstanden van Aachen naar Düsseldorf en van Aachen naar Köln, staan in de verhouding 19:17, en de afstand van Köln naar Düsseldorf is 4¼ mijl.
Bepaal de afstand van Aachen naar Köln, en van Aachen naar Düsseldorf.

De meetkunde en de bijbehorende vragenbundel was gebaseerd op een meetkundeboek dat in Frankrijk en België populair was: *Éléments de Géométrie* van Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Het was al in 1806 voor het eerst verschenen, maar tot in de jaren tachtig van de negentiende eeuw verschenen er te Parijs nieuwe herziene edities. Van Buren gebruikte voor zijn leerlingen een Nederlandse vertaling, en schreef daarbij een *Aanhangsel bij de Beginselen der Meetkunde van Legendre* (1862), waarin hij een aantal constructies en bewijzen toevoegde (***zie figuur 2***). Een aantal malen gebruikte hij daarbij coördinaten, hetgeen niet paste in de klassiek meetkundige stijl van Legendre, maar dat hij voor zijn leerlingen blijkbaar relevant vond. Ook voegde hij een aantal opdrachten over landmeetkunde toe, uitgewerkt helemaal in letters, zonder concrete getallen. In 1866 zou hij ook nog een *Beginselen der Stereometrie en Regtlijnige trigonometrie* schrijven, dat eveneens deels gebaseerd was op werk van Legendre. De stereometrie behandelde in het bijzonder de constructie van de platoonse veelvlakken en inhoudsberekeningen. De rest van het werk bevatte vooral rekenwerk met goniometrische verhoudingen, waarin de leerlingen konden oefenen met sinus- en logaritmetabellen.
Met die logaritmen en het gebruik ervan in rekenwerk hadden de leerlingen van Van Buren ondertussen al kennis gemaakt in het tweede deel van de *Beginselen de Stelkunst* (1863); ***zie figuur 3***. Daarin kwam een aantal onderwerpen aan bod, waaronder interestrekening, evenredigheden en reeksen, berekeningen aan kogelstapels – met name van belang voor degenen die toelatingsexamen aan de militaire academie overwogen – permutaties en combinaties, en het binomium van Newton.

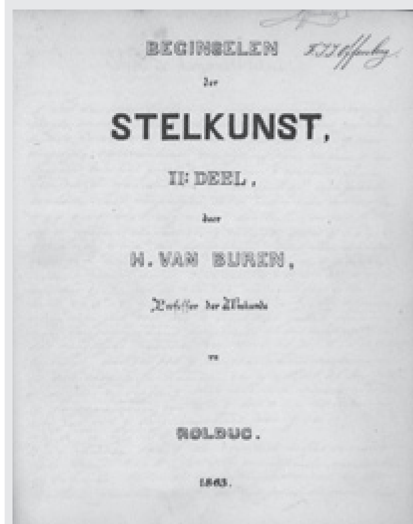
Uit het bestaan van de gehectografeerde schriftjes van Van Buren wordt duidelijk dat hij geen gebruik wilde maken van bestaande Nederlandse boeken. Liever greep hij terug op boeken die in katholieke landen ook gebruikt werden. Daar had hij dan wel een en ander in vernieuwd, en er bovendien een aantal opgavenseries bij gemaakt.
Deze op het eerste gezicht bijzondere keuze wordt mogelijk verklaard door de positie van Rolduc als onderwijsinstelling. Voor een groot deel van de leerlingen was Rolduc eindonderwijs. Degenen die doorstudeerden, gingen deels naar een Nederlandse universiteit of de Militaire Academie; een ander deel ging juist richting een Frans priesterseminarie. De schriftjes van Van Buren illustreren fraai hoe een katholiek wiskundedocent in de jaren zestig van de negentiende eeuw zich aan die situatie trachtte aan te passen.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl.*



figuur 2 Een pagina uit het Aanhangsel van het meetkundedictaat
Bron: Bibliotheek Radboud Universiteit, Nijmegen



BEGINSELEN
der
STELKUNST,
II: DEEL,
door
H. VAN BUREN,
ROLDUC.
1863.

figuur 3 De voorkant van het algebradictaat
Bron: Bibliotheek Radboud Universiteit, Nijmegen

Vanuit de oude doos

A$^{\underline{o}}$ 1930

[Ton Lecluse]

**In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!**

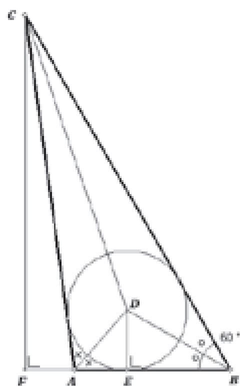
Deze keer een echt pittige goniometrisch-algebraïsche opgave uit 1930.
Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerking aan.

De opgave

Van driehoek *ABC* is de straal van de ingeschreven cirkel gelijk aan $\frac{1}{6}b$ en hoek $B = 60°$. Bepaal hoek *A* en *C*. Bepaal daarna het oppervlak van de driehoek als $b = 6$ cm.

Uitwerking

Enkele mogelijke handvatten zijn:
- Achteraf blijkt dat de driehoek stomphoekig is, dus gelijk maar in de werkschets hierop gelet.
- Het is natuurlijk toegestaan van meet af aan de lengte $AC = 6$ te gebruiken.
- Misschien is het handig om de hoogtelijn *CF* te tekenen.
- Er zijn (30-60-90)°-driehoeken.
- *AD, BD* en *CD* zijn bissectrices.



Een mogelijke aanpak met trigonometrie

Allereerst: $DE = \frac{1}{6}b = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$, dus is $EB = \sqrt{3}$.
Ook kunnen de lengtes van de lijnstukken *AE* en *AF* uitgedrukt worden in α. Omdat driehoek *BFC* een (30-60-90)°-driehoek is, kan nu een vergelijking in α worden opgesteld. Nadat deze is opgelost, kunnen de gevraagde antwoorden snel worden gevonden. Lukt het u?

Uitwerking van deze aanpak – In driehoek *ADE* geldt: $AE = \dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}\alpha}$.

In driehoek *AFC* geldt:

$$\begin{cases} \cos(180° - \alpha) = \dfrac{FA}{6} & \Rightarrow \quad FA = -6\cos\alpha \\ \sin(180° - \alpha) = \dfrac{FC}{6} & \Rightarrow \quad FC = 6\sin\alpha \end{cases}$$

Omdat $FC = \sqrt{3} \cdot FB = \sqrt{3} \cdot (FA + AE + EB)$, krijgen we dus:

(1)… $6\sin\alpha = \sqrt{3}\cdot(-6\cos\alpha + \dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}\alpha} + \sqrt{3})$

Het is een uitdaging deze vergelijking zonder rekenmachine op te lossen.
Wellicht dat de formule $\tan\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ handig is. (Deze formule kan worden afgeleid uit de verdubbelingsformule $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$; een oefening op zich!)

Met de grafische rekenmachine zijn twee snijpunten [1] te vinden tussen 0° en 180°: 22,061873° en 97,938127°.
Er zijn inderdaad twee oplossingen van de opgave: de ene waarde is α, de andere is γ, en omgekeerd. De rest van de opgave stelt hierna niet veel meer voor.
Maar ik ben benieuwd wie de vergelijking (1) exact kan oplossen.

Een mogelijke aanpak met standaardformules

Er zijn formules waarin de straal *r* van de ingeschreven cirkel voorkomt. Even op internet zoeken, of wellicht in je studieboeken!
Geschikt lijkt:

(2)… $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$

Deze formule ligt dáárom voor de hand, omdat we weten: $r = 1$ en $b = 6$, waardoor een vergelijking met twee onbekenden *a* en *c* overblijft.
Een andere voor de hand liggende formule is nu de cosinusregel (in driehoek *ABC*) omdat een zijde en een hoek bekend zijn: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, die na substitutie van de gegevens resulteert in:

(3)… $a^2 + c^2 - ac = 36$

Nu hebben we twee vergelijkingen (2) en (3) met twee onbekenden. Hoe kan deze worden opgelost? Lukt het u?

Uitwerking hiervan – Het is niet aantrekkelijk om uit (3) een van de variabelen vrij te maken. Je krijgt bijvoorbeeld $a = \dfrac{c \pm \sqrt{144-3c^2}}{2}$, waarna (2) overgaat in een gedrocht waarin niemand echt zin heeft.
Wellicht zijn er andere mogelijkheden? Hoe kun je 'anders' tegen deze vergelijkingen aankijken? Het lukte mij uiteindelijk door in relatie (2) per factor te zien dat er koppels '$a + c$' en '$a - c$' in staan.
En die koppels kun je in relatie (3) ook maken. Kijk maar:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= 36 \\ a^2 + c^2 - ac + 3ac &= 36 + 3ac \\ (a+c)^2 &= 36 + 3ac \end{aligned}$$

(4a)… $a + c = \sqrt{36 + 3ac}$

en:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= 36 \\ a^2 + c^2 - ac - ac &= 36 - ac \\ (a-c)^2 &= 36 - ac \end{aligned}$$

(4b)… $a - c = \pm\sqrt{36 - ac}$

Schrijf relatie (2) nu als:

(5)… $1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-(a-c-6)(a+c-6)(a-c+6)}{a+c+6}}$

Door substitutie in (5) van $a + c$ of $a - c$ (zie de uitdrukkingen (4a) en (4b)), waarbij en passant $ac = p$ wordt gesteld, krijgen we de vergelijking:

(6a)…
$$1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-(\pm\sqrt{36-p}-6)(\sqrt{36+3p}-6)(\pm\sqrt{36-p}+6)}{\sqrt{36+3p}+6}}$$

of:

(6b)… $1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(\sqrt{36+3p}-6)}{\sqrt{36+3p}+6}}$

(Het maakt hier niet uit of voor ± het plus- of minteken wordt gekozen. Mooi!)

Kwadrateren van (6b) en daarna kruislings vermenigvuldigen geeft:
$3p^3 + 12p^2 - 240p + 576 =$
$= 36p^2 + 288p + 576$
Een derdegraads vergelijking, waarin gelukkig de constante term wegvalt.
Daarna kunnen we delen door $3p$, hetgeen resulteert in de kwadratische vergelijking:
(7)… $p^2 - 8p - 176 = 0$
met positieve wortel $p = 4 + \sqrt{192}$.
Dus geldt: $a \cdot c = p = 4 + \sqrt{192}$, waaruit we c (of a) kunnen vrijmaken:
$$c=\frac{4+\sqrt{192}}{a}$$
Dit kunnen we mooi invullen in relatie (3).
We krijgen zo:
$$a^2+\left(\frac{4+\sqrt{192}}{a}\right)^2-(4+\sqrt{192})=36$$
hetgeen te herleiden is tot:
$a^4 - (40 + \sqrt{192})a^2 + (208 + 8\sqrt{192}) = 0$
Vanaf hier valt het tegen. De *abc*-formule genereert:
$$a=\sqrt{20+\sqrt{48}\pm\sqrt{240+12\sqrt{192}}}$$
Dan is:
$a \approx \sqrt{6{,}77181212}$ of $a \approx \sqrt{47{,}08451434}$
zodat:
$a \approx 2{,}60228594$ of $a \approx 6{,}86181567$
Dit zijn de lengtes van de zijden a en c van de driehoek.
Nu de zijden a, b en c van driehoek ABC bekend zijn, kunnen de eigenlijke vragen snel worden beantwoord.
Kunt u even formuleren hoe u het zou doen?

Een mogelijke snelle aanpak
De hoek α kan worden gevonden met de eerder genoemde uitdrukking:
$$AE=\frac{1}{\tan\frac{1}{2}\alpha}$$
Immers $AE = c - \sqrt{3}$; maar het kan ook met de sinus- of cosinusregel in driehoek ABC.
Resultaat:
$\alpha \approx 97{,}938127° \approx 97°56'17''$ of
$\alpha \approx 22{,}061873° \approx 22°3'43''$

Er is ook een ‘snelle’ formule om vanuit de zijden van de driehoek de oppervlakte te bepalen: de formule van Heron. Maar het kan hier nog sneller door van de driehoekjes *BDC, CDA* en *ADB* de oppervlakte te bepalen, Ze hebben elk als hoogte 1, en als basis respectievelijk *a, b* en *c*.
Resultaat: 7,7321 cm² (exact: $6 + \sqrt{3}$; lukt u dat?).

Ik ben benieuwd of u een alternatieve oplossing kunt bedenken! Hopelijk met minder formulegebruik.

Noot [red.]

[1] Bedoeld zijn snijpunten van de grafieken van de functies die de uitdrukkingen in het linker en rechter lid van relatie (1) als voorschrift hebben:
$f_L(x) = 6\sin x$ en
$f_R(x)=\sqrt{3}\cdot\left(-6\cos x+\frac{1}{\tan\frac{1}{2}x}+\sqrt{3}\right)$

Bron

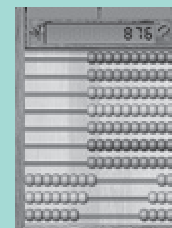
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan ’t Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Wiskunde digitaal

METEOR MATH



[Lonneke Boels]

Geschikt voor: iPhone, iPad, iPod touch

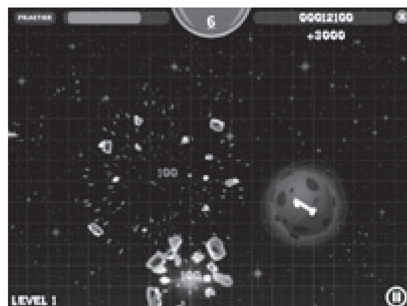
Het spel oefent de basisbewerkingen van rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Er vliegen rotsblokken in de ruimte rond en door de juiste combinatie te maken, kun je de brokken tot ontploffing brengen. Door de vormgeving is dit spel geschikt voor de middelbare school en mbo, zelfs pabo. In de oefenmodus (*practice*) en de wedstrijd modus (*compete*) kun je kiezen welke van de vier genoemde bewerkingen je oefent. Bij de *survival modus* start je automatisch met optellen en ga je door naar de volgende bewerking als je voldoende punten haalt. Je gaat dan ook een niveau omhoog.



figuur 1

Het spel start altijd op beginnnersniveau en dan zijn de opgaven zeer eenvoudig: welke twee getallen geven vermenigvuldigd de uitkomst 2? Er worden dan bovendien drie getallen gegeven. Het spel wordt echter snel moeilijker. Er komen meer getallen, je krijgt bij bepaalde combinaties een hogere score, en als je te lang nadenkt, is je tijd op en ga je een niveau naar beneden.

Het spel werkt met geluiden maar kan ook zonder worden gespeeld. De taal is Engels. Voor wie thuis is in de terminologie van rekenen: het spel oefent 1F-rekenvaardigheden (groep 8 basisvaardigheden) die overigens ook terugkomen in de kale opgaven van de 2F-rekentoets (en impliciet ook in de 3F-rekentoets) of rekenexamen.



figuur 2 In de oefenmodus kies je eerste de bewerking. Hier is 'keer' genomen. Level 1 start met eenvoudige vermenigvuldigingen. Het eindantwoord is gegeven (6) en de rotsen 2 en 3 zijn aangeklikt en ontploffen dan in een storm van punten.

Pluspunten

- Het spel start altijd zeer eenvoudig zodat je eerst kunt uitvinden hoe het precies werkt.
- Het is een echt spel.
- Fouten hebben in de oefenmodus geen invloed. Je kunt je fout herstellen. Alleen als je te lang wacht, ga je een niveau omlaag. In de survival modus kost het je een level als je een niveau naar beneden gaat.
- Je kunt kiezen welke bewerking je oefent.
- Je kunt high scores bewaren.
- Geschikt voor oudere kinderen en jongeren.
- Je kunt pauzeren.



figuur 3 In de survival modus krijg je verschillende niveaus door elkaar en heb je twee levens (planeten linksboven)

Minpunten

- Je begint iedere keer opnieuw bij het begin als je af of gestopt bent. Op den duur wordt dat saai.
- De puntentelling is onduidelijk (er staat 200 op het scherm en + 3000 krijg je erbij).
- De taal is Engels (geluid).

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: €1,79
Geschikt voor: vmbo, havo/vwo 2F, mbo 2F, hoofdrekenvaardigheden pabo.
Meer informatie over het spel: *www.mindshapes.com*

Oproep

Op internet zijn veel oefeningen te vinden voor rekenen en wiskunde. De meeste zijn echter precies dát: oefeningen.
Voor deze rubriek zoek ik echter vooral spellen voor op de mobiel of tablet. Kent u een spel dat geschikt is voor middelbare scholieren en studenten en dat bovendien gaat over wiskunde of rekenen? Laat het mij weten! Wie weet staat de beoordeling van het spel van wel in een van de volgende nummers van *Euclides*.

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, freelance docent vakdidactiek rekenen o.a. op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Een goed begin...

STUDIE-OPDRACHTEN

[Erika Bakker]

Erika Bakker is dit schooljaar gestart met haar LIO-stage Wiskunde als onderdeel van haar Educatieve Master en deelt haar belevenissen met u. In dit nummer de zesde aflevering van haar rubriek.

Naast lesgeven moet ik dit jaar ook studeren; dat kan deels thuis of op school, maar er zijn ook colleges. Hiervoor zijn de maandagen gereserveerd. De maandagen die in een vakantie vallen, zijn we altijd vrij. Werken in het onderwijs heeft dus toch zo zijn voordelen. Ik heb vorig collegejaar alle vakken die ik in het voren kon doen, alvast gevolgd, omdat ik van meerdere studenten had begrepen dat het LIO-jaar een druk jaar ging worden. Van Vakdidactiek 1 (***zie figuur 1***) en Vakdidactiek 2 kon ik me goed voorstellen dat ik ze niet buiten mijn LIO-jaar kon volgen: bij deze vakken moet je opdrachten in de klas uitvoeren, en dat gaat wat lastig als je zelf nog geen les geeft. Het vak Onderwijskunde mocht ik vorig jaar nog niet volgen vanwege de regels van de universiteit.

Naast deze vakken gaat mijn tijd zitten in het lesgeven, wat ook in studiepunten gelukkig het zwaarst meetelt, en het doen van onderzoek. Het onderzoek doe ik in een groep met vijf andere studenten. Op dit moment is het onderzoeksplan ingediend en gaan we aan de slag met het werkelijke onderzoek. We hebben dus nog geen echte resultaten waarover ik nu kan schrijven. Wel heb ik al ontdekt dat ik het schrijven van een onderzoeksplan met z'n zessen een heel lastige maar leerzame bezigheid is.

De drie vakken heb ik inmiddels allemaal gehaald. Vooral de opdrachten die ik voor Vakdidactiek heb gemaakt, waren erg leerzaam. Als ik aan collega's op school vertel wat ik heb gedaan, hoor ik vaak reacties als: 'Het zou goed zijn als ik dat ook eens deed.' Maar ook: 'Daar heb ik helemaal geen tijd voor.' Met beide standpunten ben ik het helemaal eens.

De opdrachten van Vakdidactiek kostten mij vaak heel veel tijd. Zo was een van de opdrachten om meerdere leerlingen dezelfde opgave te laten maken waarbij ze hardop moesten denken. Doel hiervan was om uit te zoeken welke verschillende oplossingsmethoden leerlingen gebruiken. Een geschikte opgave had ik snel gevonden. Ook de uitvoering, die buiten de les moest plaatsvinden, was dankzij een aantal bereidwillige leerlingen geen enorme klus. Maar daarna kwam de uitwerking van de verschillende gesprekken. Tien minuutjes van een geluidsopname uittypen kostte mij zeker een half uur tot een uur. Doordat er zes leerlingen aan mijn onderzoek meewerkten, had ik genoeg materiaal om te analyseren, maar werd het wel heel veel werk. Gelukkig was de opdracht erg leerzaam, want ik heb meer zicht gekregen op hoe leerlingen denken. Daar kom je veel lastiger achter als je bij een toets alleen maar de uitwerkingen van een leerling onder ogen krijgt.

Bij een andere opdracht moest je een deel van een eindexamen wiskunde en een deel van een eindexamen economie maken. Tijdens een gezamenlijke bijeenkomst van LIO's economie en wiskunde moesten we de opgaven van ons eigen vak aan de anderen uitleggen. Op zo'n moment kom je er achter dat de wiskunde-LIO's wel erg verknocht zijn aan de x en de y, maar ook dat de economie-LIO's de p en de q maar niet los kunnen laten. Het is een kleine moeite om hieraan bij het behandelen van grafieken aandacht te besteden, maar je moet er wel even aan denken.

Een van de eerste opdrachten was het analyseren van schoolboeken. In mijn lessen houd ik me aan de volgorde die het boek aangeeft, maar als je een andere methode bekijkt, dan zie je dat er soms is gekozen voor een andere indeling. Voordat ik een andere methode bekeek was de volgorde van het boek voor mij vanzelfsprekend. Dat is nu niet meer zo. Ook de manier waarop sommige dingen worden uitgelegd, verschilt per methode. Zo weet ik nu dat ik, als ik bijles geef aan een leerling van een andere school, eerst moet vragen welke methode de leerling op school gebruikt voordat ik een opgave over kansen ga uitleggen.

Het is erg schools om een deadline te hebben voor opdrachten zoals ik die beschreef, maar het helpt je wel om er serieus mee aan de slag te gaan. Ik hoop dat ik ook na dit LIO-jaar op deze manier verder kan leren. De deadlines worden dan niet meer door iemand anders, maar hopelijk door mijzelf gesteld.

Over de auteur
Erika Bakker studeert aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2010 rondde ze haar Bachelor Wiskunde af. Nu doorloopt ze in het kader van haar Educatieve Master een LIO-traject.
E-mailadres: *h.b.bakker.1@student.rug.nl*

Doelstelling	1. Je kunt de belangrijkste vakdidactische uitgangspunten voor het ontwerpen, uitvoeren en evalueren van het onderwijs in jouw schoolvak herkennen en benoemen. 2. Je hebt een overzicht van de belangrijkste werkvormen, methoden en leermiddelen binnen het schoolvak. 3. Je kunt werkvormen, lesmethodes en/of leermiddelen analyseren en evalueren vanuit vakdidactisch perspectief. 4. Je kunt voor het vak gangbare toetsingsvormen en beoordelingsmodellen analyseren en evalueren.
Omschrijving	De colleges en opdrachten staan in het teken van vakdidactisch handelen en analyse, en appelleren vooral aan de eigen ervaringen op school. Vakdidactiek I is een vervolg van de basiscursus. Je leert hoe je de belangrijkste vakdidactische principes kunt toepassen in je lespraktijk en hoe je je lessen, toetsen en leermiddelen kunt analyseren en evalueren. Daartoe neem je deel aan (werk)colleges met studenten van hetzelfde schoolvak of met vergelijkbare schoolvakken, bestudeer je literatuur en voer je opdrachten uit.

figuur 1 Uit: Vakdidactiek 1 wiskunde (RUG, Groningen)

Wiskunde en autisme

DEEL 5 – INITIËREN

[Bram Arens en Danny Beckers]

Leerlingen met ASS [1] vinden steeds vaker hun weg naar het reguliere onderwijs. Aan veel van deze leerlingen merk je op het eerste gezicht weinig. Dat neemt niet weg dat ze tegen problemen aanlopen, zowel thuis als op school. Als docent wiskunde ziet u de leerling vaker, kunt u beter beoordelen wat zijn of haar prestaties waard zijn en heeft u meer mogelijkheden om de leerling te sturen dan een begeleider op afstand. Het vak wiskunde is vanwege de ondubbelzinnige vragen en antwoorden bij uitstek geschikt om het leerproces van een ASS-leerling te beïnvloeden. In deze serie geven Bram Arens en Danny Beckers een aantal handvatten om effectief vorm te geven aan passend onderwijs voor deze doelgroep.

Initiëren

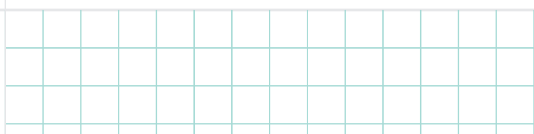
Een van de problemen die we in onze praktijk bij veel ASS-leerlingen tegenkomen en ook terug zien tijdens de wiskundeles, is dat leerlingen niet of slecht zelfstandig werken. Aan de ene kant kan dit tot uiting komen tijdens de les zelf. Je ziet dan een leerling die niet aan het werk gaat. Aan de andere kant kan het probleem zich ook alleen in de thuissituatie voordoen. Soms hebben ASS-leerlingen namelijk een starre scheiding aangebracht tussen school en thuis: schoolzaken doe je op school en juist niet thuis. Dit betekent dat de leerling in de klas niet persé opvalt, juist goed mee doet en al zijn werk afkrijgt, maar daarna thuis niets meer doet aan uw vak. Dit is bij meer leerlingen een probleem, maar juist bij ASS-leerlingen is het zaak om dit gedrag zo snel mogelijk te doorbreken. Hoe langer de situatie van niet werken voortduurt, hoe vaster het als een patroon inslijpt.
Leerlingen komen in het voortgezet onderwijs nog een heel eind, ondanks het gebrek aan vermogen om zelfstandig aan het werk te gaan, bijvoorbeeld door een ijzersterk geheugen. De motivatie om zelfstandig aan het werk te gaan, is dan erg laag, want zo is de redenering van de leerling: 'de cijfers zijn toch voldoende'. Op het punt waarop de leerling niet meer mee kan komen met de stof, zal de omschakeling om toch extra te gaan oefenen pas beginnen. Aangezien dan al een paar jaar de gewoonte bestaat om niets te doen, is dit meestal een traag en moeizaam proces met het risico dat de leerling de handdoek in de ring gooit. Om dit te voorkomen zal een leerling dus bij voorkeur al in de brugklas moeten worden gestimuleerd om zelfstandig een werkritme te ontwikkelen.
In veel gevallen is het wel mogelijk om binnen een jaar progressie te boeken. Is eenmaal het stramien van 'niet werken' doorbroken (al is het maar met 5 minuten per dag), dan kan dat vervolgens relatief gemakkelijk worden uitgebreid. Dit proces wordt in de praktijk veelal aangeduid met *initiëren*: de leerling moet als het ware leren om met zijn werk te beginnen. Het is wel een proces dat een flinke investering vergt van de betreffende leerling. Op een aantal aspecten van het gedrag van een leerling heeft u weinig invloed, maar een aantal randvoorwaarden kunt u als docent tijdens de les echter wel scheppen. Daarvoor geven we u in deze aflevering een aantal tips en tools.
In alle gevallen: een eerste doel moet zijn de leerling in kwestie gemotiveerd te krijgen om met enige vorm van regelmaat zelfstandig te werken. Dat is belangrijk om deze impasse te doorbreken. Daarnaast is het van belang te bekijken tegen welke moeilijkheden de leerling oploopt, die hem belemmeren in het zelfstandig werken. We noemen er hier een aantal.

Vastlopen in de vraagstelling

Zoals we in deel 1 van onze serie ook hebben aangegeven, kan deze moeilijkheid komen door een verwoordingsprobleem. Tijdens de les valt gemakkelijk vast te stellen of de leerling begrijpt wat er in bepaalde opdrachten van hem wordt gevraagd. Hij maakt opdrachten altijd maar half, of helemaal niet. Wanneer de leerling een probleem heeft met begrijpen wat er precies van hem wordt verlangd, dan moet daaraan in eerste instantie iets gebeuren. Het beste is het om dan remediërend te werk te gaan op vakniveau, maar tevens het zelfstandig leren werken niet uit het oog te verliezen.
Het zelfstandig werken bevordert u ondertussen door van kleine opdrachten, waarvan tijdens de les is geconstateerd dat de leerling die begrijpt, wordt verlangd dat die thuis worden afgemaakt. Laat ze de volgende keer op schrift meenemen, zodat duidelijk wordt dat ze ook daadwerkelijk op de afgesproken wijze zijn gemaakt. Roep eventueel via mentor de hulp van ouders in om te de eerste weken/maanden het maken van de opdrachten als een ritme in te trainen. Maak de opdrachten die de leerling zelfstandig maakt stap voor stap gecompliceerder: dan werkt u tegelijkertijd ook aan het leggen van verbanden.

Moeite met huiswerk

Wanneer de leerling geregeld vast loopt in zijn/haar werk en daardoor geen resultaten van zelfstandig werken kan laten zien, kunnen er verschillende problemen spelen. Tijdens de les merkt u dan dat een leerling goed kan werken, maar de pogingen om dat naar de thuissituatie te verplaatsen hebben weinig effect.
Ga op de eerste plaats na of onzekerheid een rol speelt. Sommige leerlingen hebben voortdurend bevestiging nodig. Daarmee maken ze hun hele functioneren afhankelijk van externe goedkeuring. Dit is een gedachtepatroon dat in eerste instantie doorbroken zal moeten worden, dit kan bijvoorbeeld door het benoemen van dit patroon. Eventueel door langer bezig te blijven met repetitief werk. Bijvoorbeeld met rijtjes vergelijkingen oplossen, in eerste instantie samen, vervolgens alleen met goedkeurend gemompel en geknik van uw kant, daarna met alleen goedkeurend geknik, dan met alleen onder uw aanwezigheid tijdens de les en vervolgens zonder u te maken.



Omschakelen in de les

Een alternatief probleem dat zich vaker voordoet, is dat de leerling moeite heeft met schakelen van de ene activiteit naar de andere. De leerling heeft dan steeds aansturing nodig wanneer die aan iets nieuws moet beginnen. Wat 'iets nieuws' is, varieert per leerling. Sommige leerlingen hebben moeite met schakelen van de ene naar de andere les; anderen vinden het lastig om van werkvorm te veranderen en vallen stil omdat u van de klassikale instructie overschakelt op zelf werken; weer anderen vinden het lastig om van het ene type som over te stappen op een ander type opgave, bijvoorbeeld omdat daar een ander soort voorkennis moet worden geactiveerd.
In dat geval moet er een traject worden ingezet waarin de cliënt handvatten krijgt om dit soort schakelmomenten voor zichzelf in te bouwen. Neem een notoir schakelprobleem op zo klein mogelijk niveau (bijvoorbeeld: de klassikale instructie is klaar, nu het wiskundeboek en schrift openslaan en de opgegeven opdrachten maken). Er zijn verschillende manieren om deze schakelmomenten op een duidelijke manier te laten maken. U kunt daarbij denken aan het maken van een tekening (een mooie krul onder de aantekening), het noteren van huiswerk in de agenda, het in het hoofd opzeggen van een versje. Zorg ervoor dat het een activiteit betreft die beperkt is in tijd. Essentieel is dat de gekozen activiteit de leerling ook daadwerkelijk ontspant en in staat stelt om een volgende taak op te pakken. Dit kan bij succes worden doorgevoerd naar de thuissituatie, waarbij de leerling zichzelf een startsignaal leert geven en dan de schakelactiviteit uitvoert op het moment dat hij met zijn huiswerk gaat beginnen.

Automatiseren

Een ander probleem is dat leerlingen meer moeite hebben met automatiseren en last hebben van complexe taken. Bij kleine opdrachten lukt het ze prima om zelfstandig te werken, maar bij grotere opdrachten stokken ze op de hoeveelheid mogelijkheden. In feite is er dan sprake van een tempoprobleem (hetzij in de gegevensverwerking, hetzij in de vakinhoud) dat kan worden aangepakt door de leerling te stimuleren extra te oefenen. De zelfwerkzaamheid moet ondertussen worden opgebouwd door de leerlingen deeltaken te laten uitvoeren. Als er een specifiek aantal basisvaardigheden zijn (oplossen van vergelijkingen, rekenregels bij machten, differentiëren) die moeten worden bijgeschaafd, dan ligt het voor de hand om de opdrachten daarop te richten. Wanneer echter de losse vaardigheden niet het probleem zijn, dan moet er meer uit de kast worden getrokken. Bij complexe wiskundeopgaven: laat de leerling *willekeurig iets* uitrekenen of construeren met de gegevens die hij heeft; laat de leerling een aantal relevante (lees: volgende de leerling gerelateerde) opgaven opzoeken en die oplossen.
Leer de leerling in kwestie dus zelfstandig aan het werk gaan met gerelateerde zaken. Dat heeft twee belangrijke voordelen. Enerzijds is de leerling extra met de stof bezig, en zal daardoor het automatiseringsproces worden gestimuleerd. Anderzijds geeft het de docent mooie aanknopingspunten om naar een oplossing toe te werken voor het probleem van zelfstandig werken.

Tot slot

Het is belangrijk om ook oog te hebben voor de hoeveelheid werk die de leerling in totaal aan school besteedt. Wanneer de leerling erg tegen deze hoeveelheid werk opziet, dan kan dat blokkerend werken. Het is dan van belang dat er in eerste instantie gekeken wordt naar mogelijkheden om die berg te reduceren en daarna te kijken of met kleinere brokken werk de leerling thuis wel aan het werk kan gaan.
Wanneer een leerling weet dat hij gaat doubleren en bij de pakken neerzit, dan zou u uw leerling kunnen stimuleren om juist het initiëren nu als groot probleem aan te pakken. Succes van het schooltraject na een doublure is ten slotte gekoppeld aan vooruitgang op het vlak van zelfstandig werk kunnen initiëren. Indien concentratieproblemen een rol spelen (bijvoorbeeld bij ADD of ADHD) en een leerling zich niet langer op een taak kan richten dan 5 minuten, dan zal hier eerst verandering in moeten optreden.
Voor een leerling die thuis niet werkt, wordt de oplossing vaak gezocht in een huiswerkklas. Een huiswerkklas is een tijdelijke oplossing voor leerlingen die onder toezicht wel werken, maar wanneer een leerling niet in staat is om voor tenminste een aantal vakken zelfstandig aan het werk te gaan, gaat die in zijn vervolgopleiding alsnog vast lopen. Daarmee verschuift u het probleem voor de leerling dus alleen maar. Maak dus op een zinvolle manier gebruik van de tijd die door de huiswerkklas wordt gekocht, en zorg er ondertussen voor dat uw leerling in elk geval zijn wiskundehuiswerk thuis doet. Al maakt hij maar één opgave per dag thuis, dan is daarmee de lastigste drempel genomen.

Noot en literatuur

[1] (Red.) Zie de website van Programmagroep Brein en Cognitie (van de Universiteit van Amsterdam): *www.adhd-autisme.nl/watisass.htm*

- Bram Arens, Danny Beckers: *Wiskunde en autisme. Deel 1 – Verwoordingsproblemen.* In: *Euclides* 88(2), oktober 2012.
- Bram Arens, Danny Beckers: *Wiskunde en autisme. Deel 3 – Verbanden leggen.* In: *Euclides* 88(4), februari 2013.

Over de auteurs

Bram Arens (e-mailadres: *b.arens@bureau-beckers.nl*) en Danny Beckers (e-mailadres: *d.beckers@bureau-beckers.nl*) waren werkzaam als wiskundedocent. Beiden zijn sinds een aantal jaren werkzaam bij Bureau Beckers te Nijmegen, hét expertisecentrum voor coaching van leerlingen en studenten met ASS of ADHD, en met een cognitieniveau vanaf havo.

Boekbespreking / DE ZEVEN GROOTSTE RAADSELS VAN DE WISKUNDE

[Ger Limpens]



Ondertitel: Los ze op en word miljonair!
Auteurs: Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats, Barry Koren
Uitgever: Bert Bakker (2012)
ISBN: 978 90 351 3801 8
Prijs: € 19,95 (192 pagina's; paperback)

In 1900 werd de befaamde lijst van 23 problemen van wiskundige aard die op dat moment nog niet waren opgelost, door Hilbert in Parijs gepresenteerd. Het merendeel daarvan is op dit moment opgelost dan wel voorzien van een etiket als 'te vaag geformuleerd om opgelost te kunnen worden'. In 2000 werden de millenniumproblemen door het Clay Mathematics Institute (CMI) gepresenteerd. Dat waren er nog maar zeven: we gaan vooruit, zou je in een optimistische bui kunnen stellen. Enkele van deze problemen stonden ook al op de lijst van Hilbert overigens. Die millenniumproblemen van het CMI vormen het onderwerp van het voorliggende boekje van Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats en Barry Koren. Of ik ze zelf als raadsels zou willen betitelen, is trouwens wel twijfelachtig. Bij een raadsel denk ik toch aan een (weliswaar lastig maar) overzichtelijk probleem waarvan de oplossing wel bekend is (maar die de door het raadsel uitgedaagde hopelijk niet al te snel zal zien). Bij die millenniumproblemen is dat nu (net als bij de problemen van Hilbert) niet het geval. Maar goed, het boekje is duidelijk bedoeld om op laagdrempelige wijze de betreffende onderwerpen voor het voetlicht te krijgen, gezien alleen al de ondertitel 'Los ze op en word miljonair!' De badinerende toon van die ondertitel wordt overigens in het woord vooraf al snel als schertsend gekwalificeerd: 'Als het zo eenvoudig was, waren die miljoenen allang geclaimd', zo schrijven de auteurs. Dat laatste is ontegenzeglijk waar, zo is althans mijn inschatting na lezing van het boekje. Maar dat er een hoop geld mee te verdienen is, is ook waar: het CMI heeft bij de presentatie van zijn lijst in 2000 per opgelost probleem inderdaad een bedrag van 1 miljoen dollar beschikbaar gesteld.

De lijst van zeven bevat de volgende problemen: de Riemann-hypothese, het Poincaré-vermoeden, het P-versus-NP-probleem, de Navier-Stokes-vergelijkingen, het Birch-en-Swinnerton-Dyer-vermoeden, de Kwantum-Yang-Millstheorie, het Hodge-vermoeden.
Die problemen worden in de inleiding en vervolgens in zeven afzonderlijke hoofdstukken beschreven:

- de Riemann-hypothese stelt de vraag van Riemann aan de orde of alle niet-triviale nulpunten van de zètafunctie op de kritische lijn, de rechte $x = ½$ in het complexe vlak, liggen;
- het Poincaré-vermoeden is een probleem uit de topologie waarbij men zich de vraag stelt of in iedere dimensie de bol de enige gesloten ruimte is waar alle wegen met begin- en eindpunt in topologische zin met elkaar verwant zijn;
- het P-versus-NP-probleem is een vraagstuk uit de theoretische informatica in hoeverre bepaalde tot op heden als erg inefficiënt te berekenen wiskundige problemen toch terug te brengen zijn tot een efficiëntere categorie (***zie figuur 1***);
- de Navier-Stokes-vergelijkingen hebben als thema het vraagstuk van de exacte oplossingsmogelijkheden van differentiaalvergelijkingen die horen bij het gedrag van niet-samendrukbare media zoals vloeistoffen;
- het Birch-en-Swinnerton-Dyer-vermoeden is gerelateerd aan de vraag of een elliptische kromme eindig dan wel oneindig veel rationale punten bevat;
- de Kwantum-Yang-Millstheorie komt, volgens de auteurs van dit boek, losjes geformuleerd, neer op 'geef een wiskundig correcte onderbouwing van de natuurkunde achter de allerkleinste deeltjes die we kennen en een wiskundig bewijs van de belangrijkste experimenteel geteste eigenschappen van die theorie';
- het Hodge-vermoeden is gerelateerd aan het onderzoek naar de vormen van gecompliceerde wiskundige objecten en heet het meest abstracte millenniumprobleem te zijn.

En van die lijst kan er meteen al eentje geschrapt worden; zo weten we: het Poincaré-vermoeden is in de beginjaren van dit millennium opgelost door de wiskundige kluizenaar Grigori Perelman.

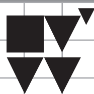
Dat Perelman zelf niet geclaimd heeft dit probleem te hebben opgelost, doet daar niets aan af, want het CMI heeft, weliswaar pas in 2010, erkend dat Perelman recht heeft op de beloning van 1 miljoen. Dat Perelman vervolgens via een kranteninterview heeft laten weten dat hij niet geïnteresseerd is in die prijs omdat hij alles al heeft wat hij hebben wil, is overigens een aardig terzijde te noemen.
En dan blijven er dus nog zes over. In het boek wordt van elk van de zeven problemen de context geschetst. Dat gebeurt niet altijd op dezelfde wijze (maar dat mag geen wonder heten met een auteurskwartet waarvan iedere auteur zich individueel gebogen heeft over een of meer van de betreffende problemen). Soms wordt behoorlijk veel ruimte gegeven aan de persoonlijke achtergronden van de verschillende naamgevers of aandragers van het probleem, bij andere problemen gebeurt dat duidelijk in mindere mate. Soms doet een auteur veel moeite om vanaf elementair wiskundig niveau te schetsen hoe het probleem (min of meer) in elkaar zit en op andere momenten wordt er op behoorlijk algemene/afstandelijke wijze gesproken over de onderliggende wiskunde. En hoewel ik het boekje in zijn geheel erg informatief vind, is deze diversiteit aan invalshoeken ook meteen het grootste manco wat mij betreft. In het woord vooraf treffen we het volgende fragment aan: ‘Kennis van Wiskunde B op vwo-niveau is meestal nodig om de tekst te kunnen begrijpen en bij enkele passage wordt dit niveau zelfs overstegen. Maar ook voor wie geen Wiskunde B heeft gehad (of die kennis weer is vergeten of heeft verdrongen), kan dit boek interessant zijn’. Dat is allemaal waar maar tegelijk wringt het daar ook. Het lezerspubliek is niet eenduidig gedefinieerd, zo zou je kunnen zeggen en dat merk je, althans, dat denk ik te merken, al lezende. Wat word ik geacht te weten? Wat word ik geacht te kunnen volgen? Mag ik zaken overslaan omdat ze te eenvoudig dan wel te ingewikkeld zijn? En dat is een rare gewaarwording, zo moet ik bekennen.
En dan doet zich na lezing van dit boek de vraag voor: voor wie is dit nu bedoeld? Wie doe je er een plezier mee zo’n boekje cadeau te doen dan wel wie zou zichzelf een plezier doen dit te gaan lezen. Dat vind ik, zeker gezien de opmerkingen die ik in de vorige alinea maakte, een erg lastige vraag. Weliswaar geen millenniumprobleem maar toch: zou ik dit boekje aan de gemiddelde lezer van *Euclides* aanraden? Ik blijf het antwoord schuldig. Mocht u zich door het bovenstaande aangetrokken voelen, lees het boekje gerust. Het is zeer zeker leerzaam en amusant geschreven. Maar mocht u het gevoel hebben niet geconfronteerd te willen worden met die wezensvragen waar ik mee worstelde, dan zou ik me, als ik u was, wel twee keer bedenken. Maar mocht u miljonair willen worden en niet twijfelen aan uw capaciteiten, dan ligt daarentegen hier uw kans!



figuur 1 Dit is figuur 23 in het boek (pag. 74), horend bij het handelsreizigersprobleem in het licht van ‘het P-versus-NP-probleem’. Een lijntekening van de rondtour langs 24.978 plaatsen in Zweden die de handelsreiziger moet afleggen. De totale lengte is ongeveer 72.500 kilometer.

Over de recensent
Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij het Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*





Van de bestuurstafel

EEN GESPREK MET HET COLLEGE VOOR EXAMENS

[Kees Lagerwaard]

Een afvaardiging van het bestuur was door Aart Gieske van het College voor Examens (CvE) uitgenodigd voor een gesprek op hun kantoor in de Muntstraat in Utrecht. En zo kwam het dat Marian Kollenveld, Henk van der Kooij en ondergetekende op 23 april j.l. net na 10 uur aanbelden bij het CvE-kantoor. In de gesprekken kwamen ter sprake: dyscalculie, rekentoetsen en de grafische rekenmachine bij examens.

Dyscalculie
Het eerste gesprek was met Ameling Algra. Ameling leidt bij het CvE onder (veel) meer projecten rondom speciale regels bij het examen voor leerlingen met een beperking. Hierbij kwam het thema 'dyscalculie' aan de orde. Het spreekt vanzelf dat leerlingen met dyscalculie op een faire manier beoordeeld moeten worden, zeker bij een verplichte rekentoets maar ook bij wiskunde. Met name bij rekenen bestaat het risico dat de leerling door zijn beperking eigenlijk op elke opgave struikelt en niet meer kan laten zien wat hij wel kan. Het CvE studeert op oplossingen, met aangepaste toetsen die op een andere wijze de exameneisen toetsen. Daarbij is het een probleem dat de definitie van dyscalculie breed is en dat de oplossing die voor de een werkt, voor de ander niet adequaat blijkt. Het toestaan van een rekenmachine (waarbij uiteraard de 'weggevertjes' vervallen) blijkt lang niet voor elke leerling met dyscalculie wat op te leveren, wie de bewerking niet begrijpt heeft niets aan de rekenmachine. Het CvE heeft inmiddels een aantal formulekaarten gezien. Sommige lijken een goede ruggensteun te bieden, andere reduceren het vak tot een invuloefening door bijvoorbeeld de oppervlakte van een driehoek (uitsluitend) in formulevorm te presenteren. Ook daar is een uniforme oplossing dus nog niet eenvoudig. Waarschijnlijk is een mix van verschillende maatregelen nodig. Het CvE is blij met het feit dat de rekentoets de komende twee jaar nog niet mede de uitslag bepaalt, zodat er meer tijd is voor grondig onderzoek.

Rekentoets
Gesprek twee was met Maaike Beuving, clustermanager taal en rekenen. Zij heeft ook de rekentoetsen in haar portefeuille. Er zijn ruim 200.000 afnames geweest in de pilot van afgelopen maart. Een enorm aantal omdat ook leerlingen uit de voor-eindexamenklas mochten meedoen. Slechts 60 vo-scholen deden niet mee. Een deel daarvan doet nog mee in juni bij de herkansingsronde.
Er zijn hiermee heel veel gegevens verzameld. Van de kandidaten is ook steeds het schooljaar, schooltype en profiel of sector vastgelegd. Op dit moment zijn nog geen overzichten van de resultaten bekend. De individuele resultaten moesten eerst. Een uitgebreide rapportage komt nog. Ook waren er vragenlijsten voor leerlingen, docenten, examensecretarissen en systeembeheerders. Dat levert wellicht ook informatie op over de manier waarop leerlingen zijn voorbereid op de toets (geoefend met zo'n digitale toets? aparte rekenlessen? technische problemen?).

We hebben de gelegenheid aangegrepen om opnieuw onze zorgpunten te uiten.
» Docenten hebben grote moeite met de geheimhouding van de toets. Je weet niet wat er precies gevraagd wordt. Dat is bij examens nooit zo. Het later openbaar maken van één toetsvariant geeft slechts summiere informatie. En als een leerling niet geslaagd is en de toets opnieuw moet afleggen, kun je de leerling niet optimaal voorbereiden omdat je niet weet wat wel en wat niet goed ging.

» Ook zijn we ongelukkig met de verplichting de toetsvragen in vaste volgorde te moeten maken. Gewoonlijk adviseer je leerlingen lastige vragen over te slaan en er later naar terug te keren. Dat kan hier dus niet.
» De toets is met 60 vragen in 90 minuten wel heel erg lang. In het mbo is de rekentoets korter. Waarom geen kortere toets in het vo?

Volgens Maaike is voor zo'n lange toets gekozen om een zo groot mogelijke betrouwbaarheid te bereiken. In het mbo zijn meer herkansingsmogelijkheden. Daarom volstaat daar een kortere toets. Toch is de toetslengte nog onderwerp van studie. Ze legt uit dat de geheimhouding voortkomt uit het voornemen een grote verzameling vragen te creëren waarvan de moeilijkheid bekend is, waaruit in de toekomst gelijkwaardige toetsen gegenereerd kunnen worden en die op termijn ook de mogelijkheid bieden om adaptief te toetsen. We herhalen onze wens dat meer voorbeeldmateriaal en oefenvragen beschikbaar komen zodat er meer duidelijk wordt over gebruikte contexten, grootheden en eenheden en hoe moet worden omgegaan met het al dan niet afronden van antwoorden.

Grafische rekenmachine bij examens

Het derde gesprek was met Jacqueline Wooning, clustermanager exacte vakken havo/vwo, en bleef, vanwege de tijd, beperkt tot de examenbesprekingen en de GR.
We hebben aangegeven dat we ongelukkig zijn met de concentratie van alle wiskunde-examens op twee dagen. Het correctiewerk moet dan allemaal in dezelfde tijd worden gedaan. En het heeft ook invloed op onze examenbesprekingen. Het CvE gaf aan dat het examenrooster elk jaar weer een ingewikkelde puzzel is. Het rooster voor 2014 is al vastgesteld en gepubliceerd, maar onze wens om de wiskunde-examens meer te spreiden wordt meegenomen bij het maken van toekomstige roosters.
Het CvE wil graag dat de lijst met afspraken die bij de centrale examen-bespreking tot stand komt, eerst langs de vaksectievoorzitter gaat alvorens we deze op de site zetten. Dit om er zeker van te zijn dat de afspraken niet in strijd zijn met het correctievoorschrift. We hebben uitgelegd dat we deze afspraken na de centrale bespreking zo snel mogelijk willen publiceren. De correctie is dan al in volle gang en de afspraken zijn bedoeld om de corrector in voorkomende gevallen de helpende hand te bieden opdat ongelijkheid in beoordeling wordt voorkomen. En bij de centrale bespreking wordt altijd het correctie-voorschrift als uitgangspunt genomen.
Vervolgens werd gemeld dat bij de examens natuurkunde en scheikunde volgens de nieuwe programma's de GR niet meer wordt toegestaan. Wel een gewone rekenmachine. En dat het CvE overweegt dit ook voor de nieuwe wiskunde-examens (havo 2017 en vwo 2018) door te voeren. De voornaamste overweging is de mogelijkheid dat leerlingen hun GR kunnen vullen met programma's die algebraïsche activiteiten kunnen uitvoeren die juist door de leerling zelf moeten worden gedaan. Dat zorgt voor ongelijkheid en dat is niet eerlijk.
Volgens Henk van der Kooij is al jaren geleden vastgesteld dat machines 'op slot' kunnen en dat dit eenvoudig te realiseren en te controleren is. Het CvE heeft aanwijzingen dat die blokkering in de praktijk gemakkelijk te omzeilen is.
Wij hebben nogmaals benadrukt dat het examenprogramma ervan uitgaat dat de leerling een GR heeft. Dus ook op het eindexamen, anders doe je het programma geweld aan. En dan moet er voor gezorgd worden dat de machines alleen kunnen wat ze mogen kunnen.
Wordt vervolgd.

Vastgeroest

SNELHEID EN GEMIDDELDE SNELHEID

[Ab van der Roest]

Een verkeerde aanpak van een som kan inspirerend zijn. Eerstejaars studenten aan de universiteit van Wageningen krijgen in het kader van het differentiequotiënt de volgende som voorgelegd:

Gegeven is de functie:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ op het interval $1 \leq x \leq 2$.

Een student pakte deze som verkeerd aan, maar zijn verkeerde aanpak was wel de aanleiding om nog eens goed over de opgave en zijn aanpak na te denken.

De uitwerking is:

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{5-1\frac{1}{2}}{1} = 3\tfrac{1}{2}$$

Er wordt dus naar een differentiequotiënt gevraagd. De student beantwoordde de vraag als volgt:

$$f'(x) = x + 2$$
$$\frac{f'(2)+f'(1)}{2} = \frac{4+3}{2} = 3\tfrac{1}{2}$$

Antwoord goed, maar methode 'fout'. Uit een tweede getallenvoorbeeld bleek echter dat ook daarbij het antwoord op beide manieren hetzelfde was.

Is er een alternatieve manier gevonden? Is deze manier altijd geldig?
Dus de algebra er op los gelaten.
Neem de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ en het interval $[p, q]$.
De gemiddelde toename op dat interval berekenen we met:

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \frac{(aq^2+bq+c)-(ap^2+bp+c)}{q-p} = \frac{a(q-p)(q+p)+b(q-p)}{q-p} = aq + ap + b$$

De 'verkeerde' methode geeft $f'(x) = 2ax + b$ en de gemiddelde toename wordt dan:

$$\frac{f'(q)+f'(p)}{2} = \frac{(2aq+b)+(2ap+b)}{2} = aq + ap + b$$

Het goede antwoord!
De methode klopt, maar is de methode algemeen geldend? Nee, want als je bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ neemt, dan zie je al snel in dat het *niet* goed gaat.
Het is dus een bijzonder geval voor tweedegraads functies.

Dat dit een bijzonder geval is voor de tweedegraads functie, is meteen in te zien met de *middelwaardestelling*. Deze luidt:
Als de functie f voor $a < b$ voldoet aan de voorwaarden:

- f is continu op het gesloten interval $[a, b]$,
- f is differentieerbaar op het open interval (a, b),

dan is er een c tussen a en b waarvoor geldt:
$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$

Herschrijven geeft: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Omdat de afgeleide lineair is, is vanuit de middelwaardestelling duidelijk dat er een c bestaat waarvoor geldt dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan het differentiequotiënt op $[a, b]$. Maar het is meteen ook duidelijk dat $c = \frac{a+b}{2}$.

Over je vak praten is nuttig, maar soms ook een beetje ontluisterend. Toen ik over het bovenstaande in gesprek kwam met een natuurkundeleraar, en met een zekere trots vertelde wat ik ontdekt had, vertelde hij dat het in zijn vak gewoon was om zo de gemiddelde snelheid te bepalen.
De formule voor afgelegde weg (bij eenparig versnelde beweging) is:
$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
En: $v(t) = s'(t) = v_0 + at$
De gemiddelde snelheid op het interval van $t = 0$ tot $t = u$ wordt dan:

$$\frac{s(u)-s(0)}{u-0} = \frac{v_0 u + \frac{1}{2}au^2}{u} = v_0 + \tfrac{1}{2}au$$

En ook is:

$$\frac{s'(0)+s'(u)}{2} = \frac{(v_0)+(v_0+au)}{2} = v_0 + \tfrac{1}{2}au$$

Over de auteur
Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *a.b.vanderroest@ziggo.nl*

PUZZEL 88-7
SEINEN MET WATERSTRALEN

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]

Beroemd om hun geheimtaal seinen Alice en Bob 's zomers in hun tuin met waterstralen (***zie figuur 1***). Ze coderen hun boodschappen in gehele getallen 1 t/m n. Gescheiden door een hoge schutting proberen ze elkaars getallen te raden. Daartoe hebben ze door gaatjes in de schutting een aantal losse tuinslangen gelegd.
Verder bezit Bob één verbindingsstukje waarmee hij de uiteinden van twee slangen aan elkaar kan koppelen. Alice bezit meerdere van die verbindingsstukjes. Bovendien heeft ze een kraan die ze op een van de slangen kan aansluiten; ***zie figuur 2***.
Samen hebben ze een afgesproken sleutel: Voor elk geheel getal k ($1 \leq k \leq n$) hebben Alice en Bob elk een schema hoe ze de kraan en/of hun verbindingsstukje(s) moeten aansluiten. Ze kennen elkaars schema.
Die sleutel is zo opgesteld dat alleen als ze hetzelfde getal k hebben, Alice wordt beloond met een verfrissende douche nadat ze de kraan heeft open gedraaid. Bij verschillende getallen mag Bob daarvan genieten. In figuur 2 hebben Alice en Bob niet hetzelfde getal.

Het spreekt vanzelf dat naarmate het aantal slangen groter is ook de maximale waarde van n groter is.
Zo'n schema is dus een lijst waarbij voor elk getal k ($1 \leq k \leq n$) staat hoe Alice de kraan en een of meer verbindingsstukjes aansluit en ook hoe Bob zijn enige verbindingsstukje aansluit.

Opgave
Bepaal voor 3, 4, 5 en 6 slangen schema's voor steeds zo groot mogelijke waarden van n.

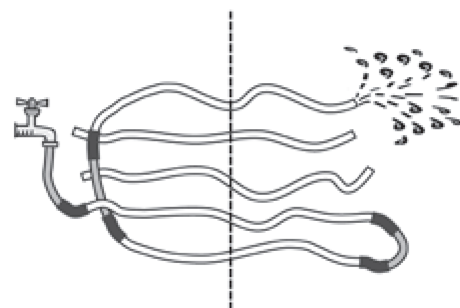
Een exacte functie voor de maximale waarde van n bij gegeven aantal slangen t, waarbij het aantal verbindingsstukjes ook voor Bob onbeperkt is, is een open vraag. Het is zelfs al een hele uitdaging hier een scherpe ondergrens voor te bepalen als Bob maar één verbindingsstukje heeft. Zinvolle ideeën hierover zijn natuurlijk zeer welkom.

Wij wensen u een warme zomer toe, zodat u deze puzzel in praktijk kan uitproberen met familie,vrienden en buren. Een fijne vakantie.



figuur 1 Uit: 'Van Bibi en Dot' door T. Hellinga-Zwart, met plaatjes van Sijtje Aafjes; uitgegeven door Gebr. Kluitman (Alkmaar, 1929)

Inzenden oplossingen
Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen en u krijgt weer extra punten door bruikbare ideeën voor een nieuwe puzzel in te sturen.
De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro.
De deadline is **15 augustus a.s.** Veel plezier.



figuur 2

RECREATIE

OPLOSSING VAN 88-5
HET SCHEVE TOPJE VAN EEN KEGEL

[Lieke de Rooij en Wobien Doyer]

De vraag was om een mooie formule te bepalen voor de inhoud I van een scheef afgesneden topje van een regelmatige vierzijdige piramide en van een kegel, bij gegeven a, b en t. Hierbij zijn a en b de afstanden van twee punten A en B op de piramide- of kegelmantel tot de symmetrie-as, waarbij de lijn AB de as snijdt in S. Voor de piramide is B het midden van een zijde van het grondvlak. De tangens van de *halve* tophoek is t. De figuren worden gesneden door een vlak door AB, zodanig dat de doorsnede met de piramide een gelijkbenig trapezium is en die met de kegel een ellips. Er waren 15 inzenders, onder wie 3 nieuwe.

Opgave 1a – Deze opgave betrof een piramide met $a = 1$, $b = 2$ en $t = ¼$. Het antwoord 16 bleek geen probleem. **Hans Klein** gebruikte de determinant-aanpak: de inhoud van twee driezijdige piramides kan je berekenen door de absolute waardes van twee determinanten op te tellen.[1] Met genoemde waarden van a, b, t en met:

$$M_1 = \begin{vmatrix} a & b & -a \\ -a & b & -a \\ a/t & b/t & a/t \end{vmatrix} \text{ en } M_2 = \begin{vmatrix} -b & b & -a \\ b & b & -a \\ b/t & b/t & a/t \end{vmatrix}$$

is dan:

$$I = \frac{1}{3!}\cdot(|M_1| + |M_2|) = 16$$

Fokke de Boer gebruikte de opgaven om voor en door leerlingen een algoritme op te stellen waarbij het lettergeheugen van de rekenmachine ‘ingewikkelde’ algebra overbodig maakt. Met name bij wiskunde A en C is dat inderdaad een vaak onderbelicht handig hulpmiddel. Zo werd de formule in kleine brokstukjes (schakels) in het geheugen opgeslagen.

Opgave 1b – Bepaal een formule voor de inhoud I van de piramide, waarbij gebruik gemaakt kan worden van $R = ½(a + b)$ en/of $M = \sqrt{(ab)}$.

Antwoord: $\boldsymbol{I = \frac{4M^2 \cdot R}{3t}}$

Er werden door de meeste inzenders fraaie tekeningen gemaakt, met de hand of computer.

Ook werd er een groot aantal verschillende wegen bewandeld om die formule af te leiden, zoals zuiver meetkundig met gelijkvormigheid en goniometrische verhoudingen, vectoren, en/of analytische oplossingen of een integraal. De meesten beschreven het afgesneden topje als een scheve piramide met hoogte h en het gelijkbenige trapezium als grondvlak, met hoogte AB en evenwijdige zijden $2a$ en $2b$ en oppervlakte $AB \cdot (a + b)$. Dan wordt de inhoud van de piramide:

$I = ⅓\, h \cdot AB \cdot (a + b)$

Enkele inzenders merkten op dat het niet nodig is AB en h te berekenen, omdat uit gelijkvormigheid of uit de oppervlakte van driehoek ATB volgt dat (en zie de tekst binnen het kader *bij **figuur 1***):

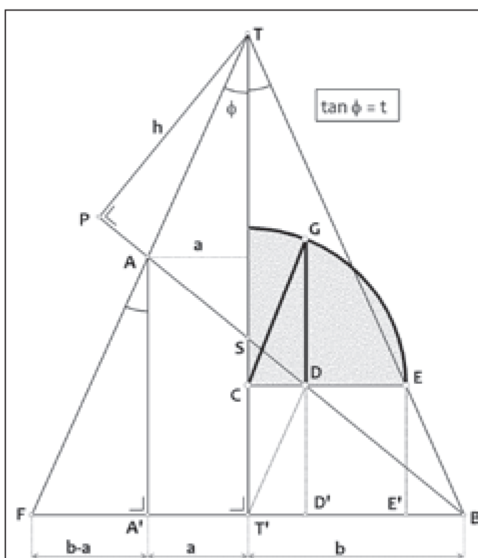
$h \cdot AB = (a + b) \cdot TS$

$$TS = TT' - ST' = \frac{b}{t} - \frac{b(b-a)}{t(a+b)} = \frac{2ab}{t(a+b)}$$

$$I = \frac{(a+b)^2 \cdot TS}{3} = \frac{(a+b)^2 \cdot 2ab}{3t(a+b)} = \frac{4M^2 \cdot R}{3t}$$

Een mooie variant van **Gerhard Riphagen** is:

$$\frac{inh(\text{scheef puntje})}{inh(\text{totaal})} = \frac{p(p+1)}{2}, \text{ met } p = \frac{a}{b}$$



figuur 1

In figuur 1 is driehoek *TFB* voor beide lichamen het vlak door de as en loodrecht op het snijvlak.
Er geldt: *ST'* : *AA'* = *b* : (*a* + *b*) en *AA'* = (*b* – *a*)/*t* ; zodat:

$$ST' = \frac{b \cdot AA'}{a+b} = \frac{b(b-a)}{t(a+b)}$$

Het middelpunt *D* van de ellips is het midden van *AB*; dus is *T'D* middenparallel van driehoek *ABF*.

$$CD = T'D' = \tfrac{1}{2}FA' = E'B = \frac{b-a}{2}$$

$$CG = CE = b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

De kwartcirkel (middelpunt *C*) ligt in een (hier omhoog geklapt) horizontaal vlak door *D*.
DG = *q* = (halve korte as van de ellips)

Opgave 2 – De inhoud van de kegel is:

$$I = \frac{M^3 \cdot \pi}{3t}$$

De meeste inzenders zagen dat het enige verschil met de piramide is dat het trapeziumvormige grondvlak van de piramide wordt vervangen door de ellipsvormige doorsnede van de kegel. Met:
opp(trapezium) = *AB* · (*a* + *b*) en
opp(ellips) = $\frac{AB}{2} \cdot q \cdot \pi$, waarbij:
q = *DG* = (halve korte as van de ellips),

is dan: $\frac{inh(\text{kegel})}{inh(\text{piramide})} = \frac{q \cdot \pi}{2(a+b)}$.

Een aantal inzenders vergiste zich met de bepaling van *q*. De stelling van Pythagoras geeft: $q = \sqrt{(ab)} = M$.
De gevraagde inhoud wordt dan:

$$\frac{4M^2 \cdot R}{3t} \cdot \frac{M \cdot \pi}{2(a+b)} = \frac{M^3 \cdot \pi}{3t} .$$

En deze uitdrukking lijkt verrassend veel op de inhoudsformule I_r van een recht doorgesneden kegel met een cirkelvormig grondvlak met straal *r* :

$$I_r = \frac{r^3 \cdot \pi}{3t}$$

Met de variant van Gerard Riphagen wordt de verhouding:
inh(scheef topje)/*inh*(gehele kegel) = $\sqrt{p^3}$
Hoewel **Harm Bakker** wel een integraal opstelde, werd het besluit om zo een formule voor de inhoud te bepalen wijselijk door alle inzenders opzij gelegd. Belangstellenden kunnen een e-mailbericht sturen voor een uitwerking.

Ladderstand

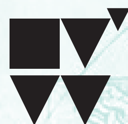
De top-10 op de ladder na puzzel 88-5 is:
L. Pos 113
G. Riphagen 112
J. Remijn 107
H. Klein 78
K. Vugs 77
H. Linders 73
F. Göbel 73
R. Stolwijk 63
T. Kool 57
K. van der Straaten 53
De felicitaties en de boekenbon gaan naar Leo Pos.

Noot

[1] Zie: *https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron#Volume*

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Oude nummers

Oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 89

nr.	verwachte verschijnings-datum	deadline
1	17 september 2013	24 jun 2013
2	5 november 2013	2 sep 2013
3	17 december 2013	28 okt 2013
4	7 februari 2014	2 dec 2013
5	25 maart 2014	27 jan 2014
6	13 mei 2014	17 maa 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

za. 27 t/m wo. 31 juli, Enschede
Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture
zondag 28 juli: Familiedag
woensdag 31 juli: Excursiedag
Organisatie Universiteit Twente, Saxion Hogeschool e.a.

ma. 19 t/m vr. 30 augustus, Utrecht
Summerschool in Mathematics en Science Education
Organisatie Universiteit Utrecht

vr. 23 en za. 24 augustus, TU/e, Eindhoven
vr. 30 en za. 31 augustus, CWI, Amsterdam
Vakantiecursus 2013: Wiskunde in wording
Organisatie PWN

donderdag 19 september
Jaarvergadering en studiemiddag 2013
Organisatie NVORWO

vr. 25 en za. 26 oktober, Utrecht
Masterclass 'Diophantische Vergelijkingen'
Organisatie Bètasteunpunt Utrecht

zaterdag 9 november 2013, Veenendaal
Jaarvergadering/Studiedag 2013
Organisatie NVvW
Zie pag. 317 in *Euclides* 88(6).

vrijdag 22 november
Conferentie 2013
Organisatie ELWIeR

2014

do. 16 en vr. 17 januari, Noordwijkerhout
Panama-conferentie
Organisatie FIsme

woensdag 2 april, op de scholen
Grote Rekendag
Organisatie FIsme